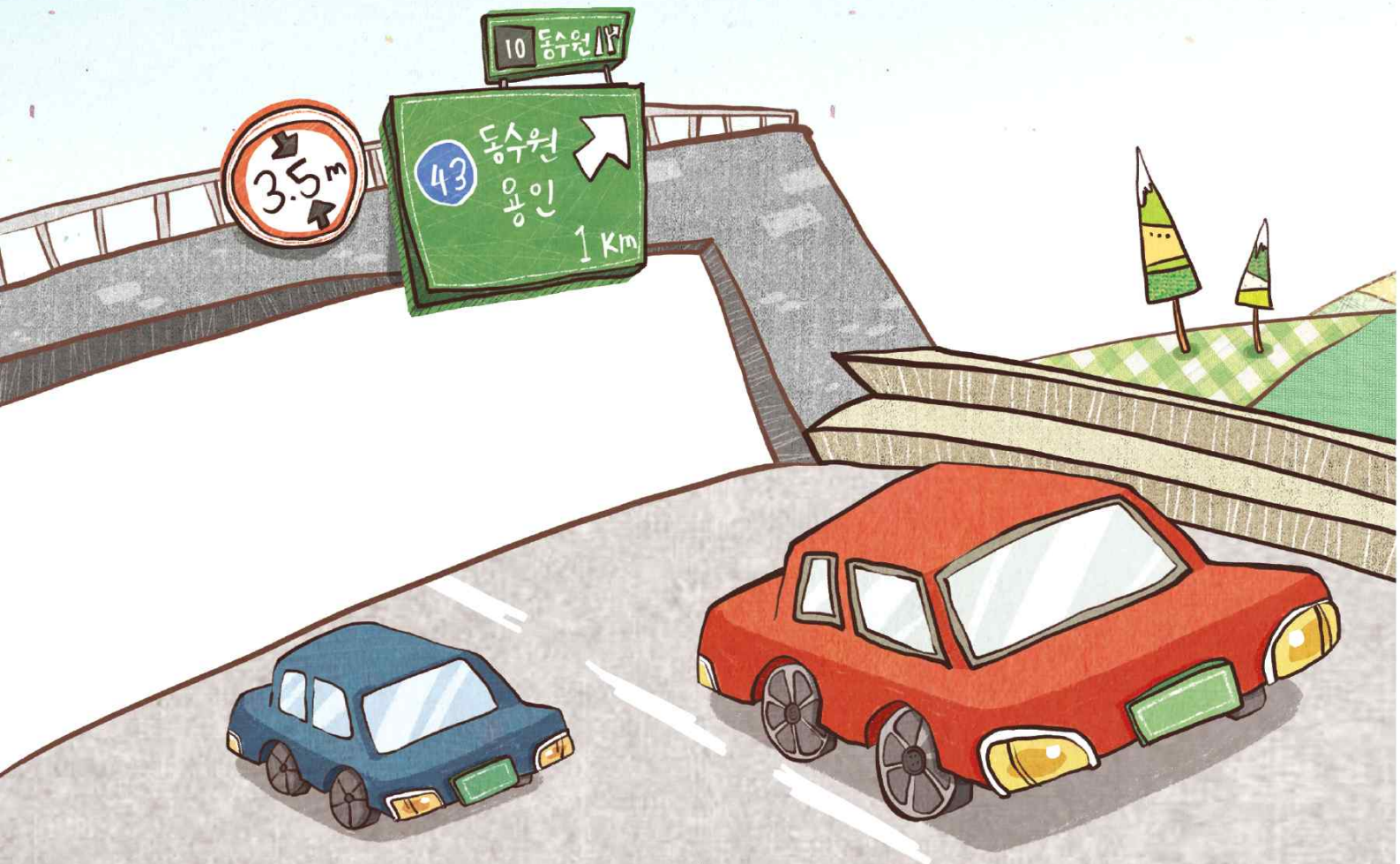
I 유리수와 소수

배운 내용 — **이 단원의** 내용 — **배울** 내용

초 5~6
- 분수와 소수

중 수학 1
- 소인수분해
- 정수와 유리수

1 유리수와 소수
- 유리수의 소수 표현
- 순환소수의 분수 표현

중 수학 3
- 제곱근과 실수

합리적
$\frac{1}{3}$의 가격 할인
99.9%
깨끗하게 살균!
환율$ 1172.50
주가지수 2010.74
환율, 주가지수, 타율 등 우리는 일상 생활에서 늘 소수를 접하고 있다. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$와 같은 분수는 각각 0.25, 0.4와 같이 소수로 나타낼 수 있는데 $\frac{1}{3}$이나 $\frac{10}{11}$과 같은 분수를 소수로 나타내면 어떻게 될까? 이 단원에서는 유리수와 소수의 관계를 알아본다.

1 유리수와 소수

준비 학습

분수와 소수

❶ 다음에서 분수는 소수로, 소수는 분수로 나타내시오.

(1) $\frac{7}{10}$　　(2) $\frac{13}{50}$　　(3) 0.19　　(4) 0.42

정수와 유리수

❷ 다음 수 중에서 정수가 아닌 유리수를 모두 찾으시오.

-5　　$\frac{3}{7}$　　6.1　　$\frac{20}{5}$　　-3.14

유리수의 소수 표현

순환소수의 뜻을 안다.

유한소수와 무한소수

클레이 사격이란 흙으로 만든 원반을 공중에 쏘아 올려 총으로 명중시키는 경기이다.

클레이 사격에서 명중률은 $\dfrac{(\text{명중한 횟수})}{(\text{쏜 횟수})}$로 나타낸다.

탐구 ① 다음은 민수와 애주의 클레이 사격 경기의 명중률을 나타낸 표이다. 표를 완성해 보자.

	쏜 횟수	명중한 횟수	명중률(분수)	명중률(소수)
민수	125	50		
애주	120	40		

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 두 소수의 차이점을 말해 보자.

유리수는 $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{2}{3}$, $\cdots$와 같이 분수 $\dfrac{a}{b}$(단, a, b는 정수, $b \neq 0$)로 나타낼 수 있는 수이다.

음의 유리수는 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 음의 부호 −를 붙여 나타낼 수 있다.

이때 분수 $\dfrac{a}{b}$는 $a \div b$, 즉 분자를 분모로 나누어 정수 또는 소수로 나타낼 수 있다.

예를 들어 유리수 $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{2}{3}$를 각각 소수로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0.25, \quad \frac{2}{3} = 2 \div 3 = 0.666\cdots$$

이때 0.25와 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나는 소수를 **유한소수**라 하며, 0.666⋯과 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 무한 번 나타나는 소수를 **무한소수**라고 한다.

스테빈(Stevin, S., 1548~1620)은 소수의 성질을 연구하고, 소수의 표기법과 계산법을 보급하였다.

문제 1 다음 분수를 소수로 나타내고, 유한소수와 무한소수로 구분하시오.

(1) $\dfrac{3}{4}$ (2) $\dfrac{1}{6}$

(3) $\dfrac{7}{8}$ (4) $\dfrac{4}{9}$

무한소수 중에는 원주율 $\pi=3.14159265\cdots$ 또는 $0.121221222\cdots$와 같이 순환소수가 아닌 무한소수도 있다.

무한소수 중에는 $0.333\cdots$, $2.1454545\cdots$와 같이 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 소수가 있다. 이러한 소수를 **순환소수**라 하고, 이때 숫자의 배열이 되풀이되는 한 부분을 **순환마디**라고 한다.

예를 들어 무한소수 $0.273273273\cdots$은 순환마디가 273인 순환소수이다.

순환소수는 순환마디의 양 끝 숫자 위에 점을 찍어서

$$0.273273273\cdots=0.\dot{2}7\dot{3}$$

과 같이 나타낸다.

❸ 순환소수 $0.1646464\cdots$를 $0.16\dot{4}\dot{6}$이나 $0.1\dot{6}46\dot{4}$로 쓰지 않도록 주의한다.

보기 ❶ $0.222\cdots=0.\dot{2}$ ❷ $9.595959\cdots=9.\dot{5}\dot{9}$ ❸ $0.1646464\cdots=0.1\dot{6}\dot{4}$

문제 2 다음 순환소수의 순환마디를 말하고, 점을 찍어 간단히 나타내시오.

(1) $0.777\cdots$ (2) $3.872872872\cdots$

(3) $0.5313131\cdots$ (4) $1.234123412341\cdots$

유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

다음 소수를 분수로 나타내려고 한다.

$$0.17=\frac{17}{\square},\quad 0.259=\frac{259}{\square},\quad 0.3641=\frac{3641}{\square}$$

탐구 ① □ 안에 알맞은 수를 차례대로 구해 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 수를 각각 10의 거듭제곱으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 유한소수는 분모가 10인 거듭제곱인 분수로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

이때 분모를 각각 소인수분해하면

$$10^2=2^2\times5^2,\ 10^3=2^3\times5^3,\ 10^4=2^4\times5^4$$

과 같이 소인수가 2와 5뿐이다.

한편 분수 $\frac{3}{5}$과 $\frac{7}{20}$은 다음과 같이 유한소수로 나타낼 수 있다.

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{6}{10}=0.6$$

$$\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\times5}=\frac{7\times5}{2^2\times5\times5}=\frac{35}{100}=0.35$$

기약분수는 더 이상 약분되지 않는 분수로 분모와 분자가 서로소이다.

이와 같이 분수를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 분자와 분모에 2 또는 5의 거듭제곱을 적당히 곱하여 분모를 10의 거듭제곱으로 고칠 수 있으므로 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

분모가 2와 5 이외의 소인수를 갖는 기약분수는 분모를 10의 거듭제곱으로 고칠 수 없으므로 유한소수로 나타낼 수 없다.

유한소수로 나타낼 수 있는 유리수

정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이면 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

예제 1 다음에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오.

(1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{7}{12}$

(3) $\frac{16}{84}$ (4) $-\frac{33}{220}$

풀이 각 분수를 기약분수로 나타낸 후 분모를 소인수분해하면 다음과 같다.

(1) $\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}$ (2) $\frac{7}{12}=\frac{7}{2^2\times3}$

(3) $\frac{16}{84}=\frac{4}{21}=\frac{4}{3\times7}$ (4) $-\frac{33}{220}=-\frac{3}{20}=-\frac{3}{2^2\times5}$

따라서 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2 또는 5뿐인 분수 $\frac{5}{8}$, $-\frac{33}{220}$은 유한소수로 나타낼 수 있다.

답 (1), (4)

문제 3 다음에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오.

(1) $\frac{2\times3^4}{2^3\times7}$ (2) $\frac{3^2\times7}{2^2\times3\times5^4}$

(3) $\frac{12}{280}$ (4) $-\frac{21}{175}$

오른쪽 달력에서 세로로 나란히 있는 두 수 중 위 칸의 수를 분자, 아래 칸의 수를 분모로 하는 분수를 만들었을 때 그 분수를 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 찾아보자.

3월

일	월	화	수	목	금	토
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

순환소수로 나타낼 수 있는 유리수

분모의 소인수가 2 또는 5뿐인 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있다. 이제 분모가 2와 5 이외의 소인수를 갖는 기약분수를 소수로 나타내 보자.

분수 $\frac{1}{7}$을 소수로 나타내면 오른쪽 나눗셈 과정에서 다음을 알 수 있다.

① 나머지는 7보다 작은 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 많아야 7번째에는 같은 수가 나타난다.

② 같은 수가 나타나면 그때부터 같은 계산 과정이 되풀이 된다.

```
      0.142857…
   7)1
     7
     30
     28
      20
      14
       60
       56
        40
        35
         50
         49
          1
          ⋮
```

같다.

따라서 $\frac{1}{7}$을 소수로 나타내면

$$\frac{1}{7}=0.142857142857142857\cdots$$
$$=1.\dot{1}4285\dot{7}$$

과 같이 순환소수가 된다.

이와 같이 분모가 2와 5 이외의 소인수를 갖는 기약분수를 소수로 나타내면 무한소수가 되고 그 무한소수는 순환소수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

순환소수로 나타낼 수 있는 유리수

정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타내었을 때 분모가 2와 5 이외의 소인수를 가지면 그 분수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

문제 4 다음에서 순환소수로만 나타낼 수 있는 것을 모두 찾으시오.

(1) $\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{6}{15}$

(3) $\frac{36}{48}$　　(4) $\frac{105}{132}$

확인하기

1 다음 분수를 순환소수로 나타내시오.

(1) $\frac{5}{9}$　　(2) $-\frac{7}{12}$

2 다음에서 유한소수로 나타낼 수 없는 것을 모두 찾으시오.

(1) $\frac{28}{2^4\times5\times7}$　　(2) $\frac{105}{2\times3^2\times7}$

(3) $\frac{9}{84}$　　(4) $\frac{117}{180}$

사고력+ 오른쪽 그림은 어떤 분수를 소수로 나타내기 위하여 나눗셈을 하는 과정인데 일부가 찢어져서 보이지 않는다. 이 분수를 순환소수로 나타낼 때 순환마디를 이루는 숫자의 개수를 구하시오.

```
)84
 77
 ---
  70
  66
  ---
   40
   33
   ---
    70
    66
    ---
     4
```

순환소수의 분수 표현

순환소수를 분수로 나타내고, 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.

순환소수를 분수로 나타내기

순환소수 $0.\dot{3}$을 x라고 하자.

$$x = 0.333\cdots$$

탐구 ① $10x$의 값을 구하고, x와 $10x$의 소수점 아래의 부분을 비교해 보자.

탐구 ② $10x$의 값과 x의 값의 차를 구해 보자.

위의 생각톡에서 두 순환소수의 소수점 아래의 부분이 같으면 그 차가 정수가 됨을 알 수 있다. 이를 이용하여 순환소수를 분수로 나타내 보자.

예를 들어 순환소수 $0.\dot{5}$를 x로 놓으면

$$x = 0.555\cdots \quad \cdots\cdots①$$

이고, ①의 양변에 10을 곱하면

$$10x = 5.555\cdots \quad \cdots\cdots②$$

이다. ②에서 ①을 변끼리 빼면

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

가 된다.

$$\begin{array}{rr} & 10x=5.555\cdots \\ -) & x=0.555\cdots \\ \hline & 9x=5 \end{array}$$

따라서 순환소수 $0.\dot{5}$를 분수로 나타내면 $\frac{5}{9}$이다.

이와 같이 주어진 순환소수에 적당한 10의 거듭제곱을 곱하면 소수점 아래의 부분이 같은 순환소수를 만들 수 있고, 이때 두 순환소수의 차가 정수임을 이용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

예제 1 순환소수 $0.\dot{4}\dot{1}$을 분수로 나타내시오.

풀이 $0.\dot{4}\dot{1}$을 x로 놓으면

$x=0.414141\cdots$ ……①

①의 양변에 100을 곱하면

$100x=41.414141\cdots$ ……②

②에서 ①을 변끼리 빼면

$99x=41$

$x=\frac{41}{99}$

$$\begin{array}{rr} & 100x=41.414141\cdots \\ -) & x=\ \ 0.414141\cdots \\ \hline & 99x=41 \end{array}$$

답 $\frac{41}{99}$

문제 1 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{7}$ (2) $0.\dot{1}\dot{2}$

(3) $0.\dot{4}6\dot{3}$ (4) $1.\dot{8}\dot{5}$

예제 2 순환소수 $0.5\dot{6}$을 분수로 나타내시오.

 $0.5\dot{6}$을 x로 놓으면

$x=0.5666\cdots$ ……①

①의 양변에 10, 100을 각각 곱하면

$10x=5.666\cdots$ ……②

$100x=56.666\cdots$ ……③

③에서 ②를 변끼리 빼면

$90x=51$

$x=\frac{51}{90}=\frac{17}{30}$

$$\begin{array}{rr} & 100x=56.666\cdots \\ -) & 10x=\ \ 5.666\cdots \\ \hline & 90x=51 \end{array}$$

답 $\frac{17}{30}$

문제 2 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.7\dot{8}$ (2) $0.9\dot{1}$

(3) $0.2\dot{6}\dot{4}$ (4) $1.0\dot{0}\dot{9}$

이상에서 순환소수는 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수임을 알 수 있다. 유한소수 역시 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

따라서 유한소수와 순환소수는 모두 유리수임을 알 수 있다.

일반적으로 유리수와 순환소수 사이에 다음 관계가 성립한다.

유리수와 순환소수의 관계

❶ 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

❷ 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

추론 **문제 3** 다음에서 옳게 말한 사람을 모두 찾으시오.

확인하기

1 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{5}\dot{1}$　　　　(2) $1.4\dot{3}$

2 다음 수 중에서 유리수를 모두 찾으시오.

5.2	π	$3.\dot{2}\dot{8}$	$0.12345678910111213\cdots$

소수를 이용하여 작곡하기

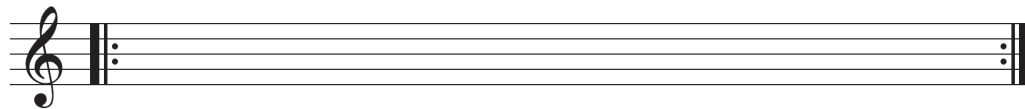
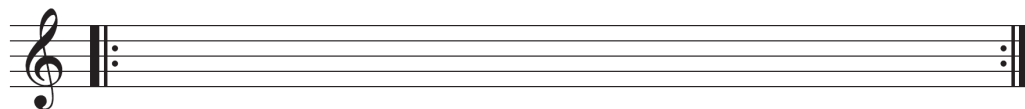
문제 해결 창의·융합

다음은 0부터 9까지의 숫자를 10개의 음에 각각 대응시켜 그린 것이다.

이제 분수를 소수로 나타낸 후 소수점 아래의 숫자를 위의 규칙에 따라 음으로 나타내 보자.

예를 들어 $\frac{1}{8}$은 0.125이므로 로 나타내고, $\frac{8}{11}$은 $0.727272\cdots$이므로

로 나타내기로 하자.

활동 1 분수 $\frac{88}{111}$을 소수로 나타내고, 소수점 아래의 숫자를 위의 규칙에 따라 다음 오선지 위에 음으로 나타내 보자.

활동 2 다음 오선지 위에 연주하고 싶은 음을 그리고, 소수와 분수로 나타내 보자.

활동 3 유한소수로 나타낼 수 있는 분수 3개와 순환소수로 나타낼 수 있는 분수 1개를 사용하여 자신만의 음악을 작곡해 보자.

중단원 마무리

Ⅰ-1 유리수와 소수

정답 및 풀이 272쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 유리수의 소수 표현 11쪽

(1) [   ]: 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나는 소수

(2) [   ]: 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 무한 번 나타나는 소수

❷ 순환소수 12쪽

(1) [   ]: 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 무한소수

(2) [   ]: 순환소수에서 숫자의 배열이 되풀이되는 한 부분

(3) 순환소수는 순환마디의 양 끝 숫자 위에 점을 찍어서 나타낸다.

❸ 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있는 유리수 13쪽

(1) 분모의 소인수가 [ ] 또는 [ ]뿐인 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

(2) 분모가 [ ]와 [ ] 이외의 소인수를 갖는 기약분수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

❹ 순환소수를 분수로 나타내는 방법 16쪽

(1) 순환소수를 x로 놓는다.

(2) 양변에 [   ]을 곱하여 소수점 아래의 부분이 같은 두 식을 만든다.

(3) 두 식을 변끼리 빼서 x를 구한다.

❺ 유리수와 순환소수의 관계 18쪽

(1) 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 [   ]로 나타낼 수 있다.

(2) 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

표준 문제

01 순환소수의 표현이 옳은 것을 **보기**에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) $0.747474\cdots=0.\dot{7}\dot{4}$ (ㄴ) $0.369369369\cdots=0.\dot{3}\dot{6}\dot{9}$

(ㄷ) $2.525252\cdots=\dot{2}.\dot{5}$ (ㄹ) $-1.4888\cdots=-1.4\dot{8}$

02 다음 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 있는 것을 모두 고르시오.

$$\frac{3}{14} \qquad \frac{9}{48} \qquad \frac{12}{20} \qquad \frac{8}{55} \qquad \frac{15}{54}$$

서술형

03 $\frac{5}{24} \times a$를 소수로 나타내면 유한소수일 때, 한 자리 자연수 a를 모두 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

04 순환소수 $x = 83.2707070\cdots$을 분수로 나타낼 때, 이용할 수 있는 가장 간단한 식은?

① $100x - x$　② $100x - 10x$　③ $1000x - x$

④ $1000x - 10x$　⑤ $1000x - 100x$

05 다음에서 옳은 것은?

① 순환소수 중에는 유리수가 아닌 것도 있다.

② 모든 기약분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

③ 유한소수와 무한소수는 모두 유리수이다.

④ 정수가 아닌 유리수는 모두 유한소수로 나타낼 수 있다.

⑤ 유한소수로 나타낼 수 없는 분수는 모두 순환소수로 나타낼 수 있다.

도전 문제

문제 해결

06 길이가 1 m인 실을 남김없이 사용하여 정n각형을 만들려고 한다. 10보다 작은 자연수 n 중에서 정n각형의 한 변의 길이를 유한소수로 나타낼 수 있는 것은 모두 몇 개인지 구하시오. (단, 정n각형의 한 변의 길이의 단위는 m이다.)

서술형

07 어떤 기약분수를 순환소수로 나타내는데, 가희는 분모를 잘못 보아서 $1.4\dot{3}$이라 하였고 우진이는 분자를 잘못 보아서 $0.\dot{6}\dot{3}$이라고 하였다. 처음의 기약분수를 순환소수로 나타내는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

Ⅰ 유리수와 소수

대단원 마무리

정답 및 풀이 273쪽

01 다음에서 순환마디가 바르게 연결된 것은?

① 0.131313⋯ ➔ 131
② 0.2545454⋯ ➔ 54
③ 0.581581581⋯ ➔ 5815
④ 2.762762762⋯ ➔ 276
⑤ 19.419419419⋯ ➔ 194

02 분수 $\frac{8}{27}$을 순환소수로 나타낼 때, 소수점 아래 200번째 자리의 숫자는?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 9

03 분수 $\frac{1}{40}$을 $\frac{a}{10^n}$의 꼴로 고쳐서 유한소수로 나타낼 때, $a+n$의 값 중 가장 작은 수를 구하시오. (단, a, n은 자연수이다.)

04 분수 $\frac{21}{a}$을 소수로 나타내면 유한소수일 때, 다음에서 a의 값이 될 수 없는 것은?

① 4　② 6　③ 9
④ 14　⑤ 15

05 다음 조건을 모두 만족시키는 자연수 A를 모두 구하시오.

(가) $\frac{A}{480}$는 유한소수로 나타낼 수 있다.
(나) A는 13의 배수이다.
(다) A는 두 자리 자연수이다.

06 두 분수 $\frac{x}{15}$와 $\frac{x}{56}$를 소수로 나타내면 모두 유한소수가 된다고 할 때, x의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

서술형

07 두 분수 $\frac{2}{5}$와 $\frac{6}{7}$ 사이에 있는 분모가 35인 분수 중에서 유한소수로 나타낼 수 없는 분수의 개수를 구하시오.

08 다음에서 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $0.4\dot{7}$을 기약분수로 나타내면 $\frac{43}{99}$이다.

② 두 순환소수 $0.\dot{2}$와 $2.\dot{3}$을 기약분수로 나타낼 때, 그 분모는 서로 같다.

③ $94.2\dot{7}5\dot{3}$은 유리수이다.

④ 기약분수 중에는 유한소수로 나타낼 수 없는 것도 있다.

⑤ 모든 무한소수는 유리수이다.

09 두 자리 자연수 a에 대하여 $\frac{a}{210}$를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{3}{b}$이 된다. 이때 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

10 기약분수 $\frac{b}{a}$를 소수로 나타내면 $0.\dot{2}\dot{7}$일 때, $\frac{a}{b}$를 순환소수로 나타내는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

❶ 순환소수의 뜻을 알고 순환마디를 구할 수 있다.

❷ 유한소수로 나타낼 수 있는 분수의 특징을 알 수 있다.

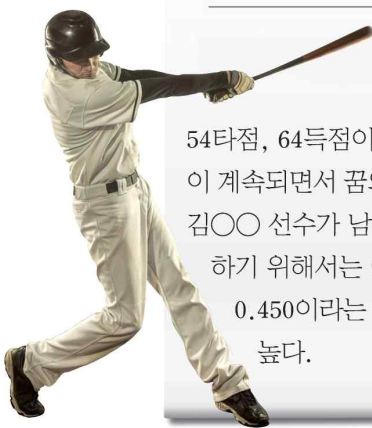
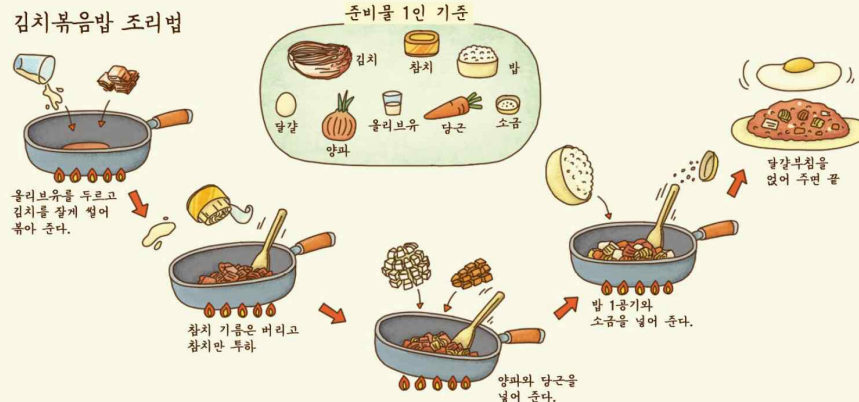
❸ 순환소수를 분수로 나타내고, 유리수와 순환소수의 관계를 알 수 있다.

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

생활 속의, 분수와 소수

생활 속에서 접할 수 있는 다양한 자료 중에는 분수와 소수를 이용한 것들이 많다. 다음은 분수와 소수 표현을 사용한 자료의 일부이다.

김치볶음밥 조리법

- 주재료: 김치 $\frac{1}{2}$컵(75 g), 밥 1공기(200 g)
- 부재료: 참치 1캔, 양파 $\frac{1}{8}$개(25 g), 당근 $\frac{1}{8}$개(25 g), 올리브유 2큰술(30 mL), 달걀 1개 (60 g), 소금(약간)

뜨거운 김○○ 선수, 꿈의 '4할 타율'

현재까지 김○○ 선수의 성적은 101경기 타율 0.392(344타수 135안타), 4홈런, 54타점, 64득점이다. 전반기를 타율 0.380으로 마치고 후반기에는 타율 0.450으로 종횡무진 활약이 계속되면서 꿈의 4할 타율 이야기가 솔솔 나온다.

김○○ 선수가 남은 36경기에서 경기당 평균 3타수씩 소화한다고 가정하면 꿈의 4할 타율을 달성하기 위해서는 이 기간 타율을 0.426(108타수 46안타)으로 유지해야 한다. 그의 후반기 타율이 0.450이라는 점을 고려했을 때, 현재 페이스를 계속 유지한다면 '꿈의 기록'을 달성할 가능성이 높다.

(출처: 『연합뉴스』, 2017. 8. 18.)

과제 1 분수, 소수를 사용할 때의 장단점을 말해 보자.

과제 2 우리 생활 속에서 분수와 소수를 사용하여 표현한 자료를 찾아 발표해 보자.

순환소수에 대한 미해결 문제

독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 수학의 여러 분야에서 뛰어난 업적을 남겨 19세기 최고의 수학자라고 일컬어진다. 그는 수학에 이른바 수학적 엄밀성과 완전성을 도입하여 수리 물리학으로부터 독립된 순수 수학의 길을 개척하여 근대 수학을 확립하였다. 국제 수학 연맹에서는 이러한 그의 업적을 기리기 위하여 세계 수학자 대회에서 가우스상을 수여하고 있다.

(출처: 두산백과사전, 2017)

가우스는 순환마디를 이루는 숫자의 개수, 즉 순환마디의 길이를 연구하였다.

예를 들어 $0.\dot{3}$의 순환마디의 길이는 1이고, 유한소수의 순환마디의 길이는 0이다. 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{n}$을 소수로 나타내었을 때, 순환마디의 길이를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

분수	소수	순환마디의 길이	분수	소수	순환마디의 길이
$\frac{1}{2}$	0.5	0	$\frac{1}{7}$	$0.\dot{1}4285\dot{7}$	6
$\frac{1}{3}$	$0.\dot{3}$	1	$\frac{1}{8}$	0.125	0
$\frac{1}{4}$	0.25	0	$\frac{1}{9}$	$0.\dot{1}$	1
$\frac{1}{5}$	0.2	0	$\frac{1}{10}$	0.1	0
$\frac{1}{6}$	$0.1\dot{6}$	1	$\frac{1}{11}$	$0.\dot{0}\dot{9}$	2

자연수 n에 대하여 $\frac{1}{n}$의 최대 순환마디의 길이는 $n-1$이다. 위의 표에서 $n=7$인 경우에 순환마디의 길이는 6으로 최대 순환마디를 갖는다.

1801년 가우스는 최대 순환마디를 갖는 자연수 n이 무수히 많을 것으로 추측하였지만 이것은 아직 참인지 거짓인지 확인되지 않았다.

수학 연구원 | 수학적 지식과 이론을 발전시키기 위한 연구를 수행하며 수학적 이론과 기법을 활용하여 경제학, 과학, 공학 등의 관련 문제를 해결하기 위한 연구를 한다.

Ⅱ 식의 계산

배운 내용 — **이 단원의 내용** — **배울 내용**

배운 내용

중 **수학 1**
- 문자의 사용
- 일차식의 계산

이 단원의 내용

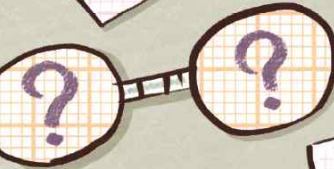
1 단항식의 계산
- 지수법칙
- 단항식의 곱셈과 나눗셈

2 다항식의 계산
- 다항식의 덧셈과 뺄셈
- 다항식의 곱셈과 나눗셈

배울 내용

중 **수학 3**
- 다항식의 곱셈
- 다항식의 인수분해

고 **수학**
- 다항식의 연산

$(a+b) \div c = \frac{a+b}{c}$
수학 체험전
$a^m \times a^n = a^{m+n}$
1
문자를 사용하면 수량 사이의 관계를 식으로 간결하고 명확하게 표현할 수 있고 수처럼 식도 계산할 수 있다.
이 단원에서는 단항식과 다항식의 계산 원리를 알아본다.
x^2y
$\times x^4$
$\div \frac{xy}{2}$
$\times 6x^4y$
$\div y^2$
$\div 2xy$
2
300
540

1 단항식의 계산

준비 학습

거듭제곱

❶ 다음을 거듭제곱으로 나타내시오.

(1) $2\times5\times2\times2\times5$

(2) $\frac{1}{2\times2\times3\times3\times3}$

일차식의 계산

❷ 다음을 계산하시오.

(1) $3a\times5$

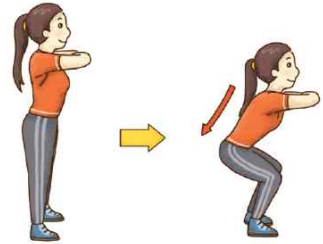
(2) $6x\div3$

지수법칙

지수법칙을 이해한다.

$a^m \times a^n$의 계산

스쿼트(Squat)이란 오른쪽과 같이 양발을 좌우로 벌리고 서서 등을 펴고 무릎을 굽혔다 폈다 하는 운동을 말한다.
민지는 하루에 4번, 한 번에 8회씩 스쿼트를 하기로 하였다.

탐구 민지가 하루에 실시한 스쿼트의 총횟수를 식으로 나타내면 $4 \times 8 = 32$이다. 이 식을 2의 거듭제곱을 이용하여 나타내 보자.

2^2은 2를 2개, 2^3은 2를 3개 곱한 것이므로

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

이다.

같은 방법으로 $a^2 \times a^3$을 간단히 나타내면

$$\begin{aligned} a^2 \times a^3 &= (\underbrace{a \times a}_{2\text{개}}) \times (\underbrace{a \times a \times a}_{3\text{개}}) \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times a \times a}_{5\text{개}} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

이다. 이때 a^5의 지수 5는 $a^2 \times a^3$에서 두 지수 2와 3의 합과 같음을 알 수 있다.

일반적으로 밑이 같은 거듭제곱의 곱셈에서는 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수법칙 (1)

m, n이 자연수일 때, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

문제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3^5 \times 3^2$ (2) $5^8 \times 5^4$

(3) $a^3 \times a^7$ (4) $x^2 \times x^6$

예제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $a^2 \times a^3 \times a^6$　　(2) $x^7 \times y^4 \times x \times y^5$

(1) $a^2 \times a^3 \times a^6 = a^{2+3+6} = a^{11}$ 과 같이 계산해도 된다.
(2) $x = x^1$이다.

풀이 (1) $a^2 \times a^3 \times a^6 = a^{2+3} \times a^6 = a^5 \times a^6 = a^{5+6} = a^{11}$

(2) $x^7 \times y^4 \times x \times y^5 = (x^7 \times x) \times (y^4 \times y^5) = x^{7+1} \times y^{4+5} = x^8 y^9$

답 (1) a^{11}　(2) $x^8 y^9$

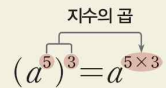
문제 2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $a^5 \times a^7 \times a$　　(2) $x^8 \times y^4 \times x^4 \times y^3$

$(a^m)^n$의 계산

$(a^5)^3$은 a^5을 3개 곱한 것이므로

$$(a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5 = a^{5+5+5} = a^{5\times 3} = a^{15}$$

이다. 이때 a^{15}의 지수 15는 $(a^5)^3$에서 두 지수 5와 3의 곱과 같음을 알 수 있다.

일반적으로 거듭제곱의 거듭제곱에서는 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수법칙 (2)

m, n이 자연수일 때,　$(a^m)^n = a^{mn}$

예제 2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^3)^7$　　(2) $(x^5)^2 \times (x^4)^6$

풀이 (1) $(a^3)^7 = a^{3\times 7} = a^{21}$

(2) $(x^5)^2 \times (x^4)^6 = x^{5\times 2} \times x^{4\times 6} = x^{10} \times x^{24} = x^{10+24} = x^{34}$

답 (1) a^{21}　(2) x^{34}

문제 3 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^2)^8$　　(2) $(x^4)^5 \times (x^3)^6$

$a^m \div a^n$의 계산

비눗방울 막은 눈으로 볼 수 있는 매우 얇은 막 중 하나이다. 비눗방울 막의 두께는 100 nm(나노미터)이고, 사람의 머리카락의 두께는 100000 nm(나노미터)일 때, 다음을 알아보자.

탐구 머리카락이 비눗방울 막보다 몇 배 두꺼운지 계산하는 식은 $100000 \div 100 = 1000$이다. 이 식을 10의 거듭제곱을 이용하여 나타내 보자.

1 nm는 $\frac{1}{10^9}$ m야.

a가 0이 아닐 때, $a^5 \div a^2$, $a^2 \div a^2$, $a^2 \div a^5$을 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{5개}}{\underbrace{a \times a}_{2개}} = a \times a \times a = a^3$$

$$a^2 \div a^2 = \frac{a^2}{a^2} = \frac{\overbrace{a \times a}^{2개}}{\underbrace{a \times a}_{2개}} = 1$$

$$a^2 \div a^5 = \frac{\overbrace{a \times a}^{2개}}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times a}_{5개}} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$$

이때 a^3의 지수 3은 $a^5 \div a^2$에서 두 지수 5와 2의 차와 같음을 알 수 있다. 또 밑과 지수가 각각 같은 거듭제곱의 나눗셈의 결과는 1이고, $\frac{1}{a^3}$의 분모 a^3의 지수 3은 $a^2 \div a^5$에서 두 지수 2와 5의 차와 같음을 알 수 있다.

지수의 차
$a^5 \div a^2 = a^{5-2}$
지수의 차
$a^2 \div a^5 = \frac{1}{a^{5-2}}$

일반적으로 밑이 같은 거듭제곱의 나눗셈에서는 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수법칙 (3)

$a \neq 0$이고 m, n이 자연수일 때,

❶ $m > n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

❷ $m = n$이면 $a^m \div a^n = 1$

❸ $m < n$이면 $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

예제 3 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $a^9 \div a^4$　　(2) $x^7 \div x^{10}$　　(3) $a^5 \div a^3 \div a^2$

풀이 (1) $a^9 \div a^4 = a^{9-4} = a^5$

(2) $x^7 \div x^{10} = \dfrac{1}{x^{10-7}} = \dfrac{1}{x^3}$

(3) $a^5 \div a^3 \div a^2 = a^{5-3} \div a^2 = a^2 \div a^2 = 1$

답 (1) a^5　(2) $\dfrac{1}{x^3}$　(3) 1

문제 4 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^6)^2 \div a^8$　　(2) $(x^4)^3 \div (x^2)^7$　　(3) $(x^3)^9 \div (x^5)^5 \div x^2$

$(ab)^m$과 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$의 계산

$(ab)^3$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$ $(b \neq 0)$은 밑이 각각 ab, $\dfrac{a}{b}$이므로

$$\begin{aligned}(ab)^3 &= ab \times ab \times ab \\ &= a \times a \times a \times b \times b \times b \\ &= a^3b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \\ &= \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} \\ &= \frac{a^3}{b^3}\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a^3}{b^3}$

이다.

일반적으로 밑이 곱 또는 몫인 거듭제곱에서는 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

 지수법칙 (4)

m이 자연수일 때,

❶ $(ab)^m = a^m b^m$　　❷ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ $(b \neq 0)$

예제 4 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^2b)^5$　　(2) $(-2x^5)^4$　　(3) $\left(\frac{a^6}{b^8}\right)^3$

(1) $(a^2b)^5=(a^2)^5\times b^5=a^{10}b^5$

(2) $(-2x^5)^4=(-2)^4(x^5)^4=16x^{20}$

(3) $\left(\frac{a^6}{b^8}\right)^3=\frac{(a^6)^3}{(b^8)^3}=\frac{a^{18}}{b^{24}}$

답 (1) $a^{10}b^5$　(2) $16x^{20}$　(3) $\frac{a^{18}}{b^{24}}$

문제 5 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^6b^5)^2$　　(2) $(-x^2y^7)$　　(3) $\left(\frac{x^5}{3y}\right)^3$

오류 찾기

다음은 세 학생이 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한 것이다. 답을 잘못 구한 학생을 찾고, 틀린 답을 바르게 고쳐 보자.

신아: $(a^2)^3\times a^5=a^{11}$

은수: $(a^3)^4\div a^6=a^2$

정우: $(-3a^5)^2=9a^{10}$

확인하기

1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $a^3\times b^2\times a^5\times b^7$　　(2) $a^8\div(a^6)^2$

(3) $(x^3y)^4$　　(4) $\left(\frac{x^2}{y^5}\right)^3$

2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^2)^7\times(b^4)^3\times(-a)^6\times b^5$　　(2) $(x^3)^8\div(x^2)^5\div x^4$

사고력+ 오른쪽 보기와 같이 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한 결과가 a^7이 되도록 a^3과 a^5을 사용하여 식을 만드시오.

단항식의 곱셈과 나눗셈

지수법칙을 이용하여 단항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

단항식의 곱셈

서후네 반에서는 6개의 모둠이 모둠별로 가로의 길이가 x, 세로의 길이가 y인 직사각형 모양의 종이에 그림을 그린 후 이 종이 6장을 모아 오른쪽 그림과 같이 하나의 협동작품을 완성하였다.

탐구 ① 협동 작품의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 나타내 보자.

탐구 ② 협동 작품의 넓이를 모둠별로 그린 그림의 넓이의 합으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 협동 작품의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $3x$, $2y$이므로 그 넓이는

$$3x \times 2y$$

이다.

한편 모둠별로 그린 그림 하나의 넓이는 xy이고, 모두 6개의 그림이 있으므로 협동 작품의 넓이는 $6xy$이다.

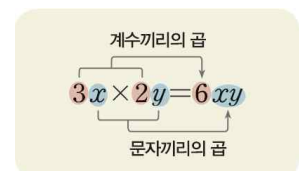
따라서

$$3x \times 2y = 6xy$$

임을 알 수 있다.

이것은 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 다음과 같이 계산한 것과 같다.

$$\begin{aligned} 3x \times 2y &= 3 \times x \times 2 \times y \\ &= 3 \times 2 \times x \times y \\ &= (3 \times 2) \times (x \times y) \\ &= 6xy \end{aligned}$$

교환법칙
결합법칙

이와 같이 단항식의 곱셈은 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 곱하여 계산한다. 이때 같은 문자의 곱은 지수법칙을 이용하여 간단히 한다.

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $5a\times(-3b)$ (2) $4x^2\times 9xy^6$

풀이 (1) $5a\times(-3b)=5\times a\times(-3)\times b=5\times(-3)\times a\times b=-15ab$

(2) $4x^2\times 9xy^6=4\times x^2\times 9\times x\times y^6=4\times 9\times x^2\times x\times y^6=36x^3y^6$

답 (1) $-15ab$ (2) $36x^3y^6$

문제 1 다음을 계산하시오.

(1) $8a^3\times 5a^2$ (2) $(-6a)\times 7a^4$

(3) $\frac{1}{3}x^2y\times(-12xy^6)$ (4) $x^9y^2\times(-2xy^5)^2$

단항식의 나눗셈

단항식의 나눗셈은 다음과 같이 나눗셈을 곱셈으로 바꾸거나 주어진 식을 분수의 꼴로 바꾸어 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

$A\div B=A\times\frac{1}{B}$

$A\div B=\frac{A}{B}$

$$12x^2y\div 3x=12x^2y\times\frac{1}{3x}=12\times\frac{1}{3}\times x^2\times\frac{1}{x}\times y=4xy$$

$$12x^2y\div 3x=\frac{12x^2y}{3x}=\frac{12}{3}\times\frac{x^2}{x}\times y=4xy$$

예제 2 다음을 계산하시오.

(1) $6a^5b^4\div 2ab$ (2) $(4x^3y)^2\div\frac{2}{3}xy^3$

풀이 (1) $6a^5b^4\div 2ab=\frac{6a^5b^4}{2ab}$

$=\frac{6}{2}\times\frac{a^5}{a}\times\frac{b^4}{b}$

$=3a^4b^3$

(2) $(4x^3y)^2\div\frac{2}{3}xy^3=16x^6y^2\times\frac{3}{2xy^3}$

$=16\times\frac{3}{2}\times x^6\times\frac{1}{x}\times y^2\times\frac{1}{y^3}$

$=\frac{24x^5}{y}$

계수가 분수인 단항식으로 나눌 때에는 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산하는 것이 편리하다.

답 (1) $3a^4b^3$ (2) $\frac{24x^5}{y}$

문제 2 다음을 계산하시오.

(1) $8a^5b^6 \div 4ab^3$

(2) $21a^4b^2 \div (-7a^8b)$

(3) $(-x^5y^4)^2 \div x^3y^4$

(4) $(-4x^6y)^3 \div \frac{8}{3}x^9y^2$

단항식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산하면 편리하다.

보기
$$x^3y^5 \div 2x^4 \times 6x^9y^2 = x^3y^5 \times \frac{1}{2x^4} \times 6x^9y^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times 6\right) \times \left(x^3 \times \frac{1}{x^4} \times x^9\right) \times (y^5 \times y^2)$$
$$= 3x^8y^7$$

문제 3 다음을 계산하시오.

(1) $7a^4b^2 \times (-a^5) \div \frac{b^8}{2}$

(2) $(6xy^3)^2 \div 9x^4y^6 \times x^5y^7$

확인하기

1 다음을 계산하시오.

(1) $5a^3b^2 \times (-2ab^7)$

(2) $9x^4y^3 \times \left(-\frac{1}{3}xy^3\right)^2$

2 다음을 계산하시오.

(1) $(-4a^6b^5)^2 \div a^7b^4$

(2) $(a^5b^4)^3 \div \frac{1}{2}a^7b^9$

(3) $9x^7y^2 \div 3x^8y^4 \times (-xy)^3$

(4) $(5xy)^2 \div \left(-\frac{5}{6}y^4\right) \div 15x^3y$

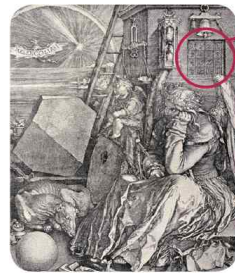
사고력

오른쪽 12개의 직사각형에서 각 직사각형의 가로의 길이는 그 왼쪽에 이웃한 직사각형의 가로의 길이의 a배이고, 세로의 길이는 그 아래쪽에 이웃한 직사각형의 세로의 길이의 b배이다. 이때 직사각형 Q의 넓이는 직사각형 P의 넓이의 몇 배인지 구하시오.

마방진을 이용한 새로운 배열

추론 의사소통

마방진은 정사각형 모양에 1부터 연속하는 자연수를 가로, 세로, 대각선의 합이 일정하도록 배열한 것으로 그림이나 건축, 소설 등에서 여러 가지 의미를 상징하거나 암호로 사용된다.

독일의 화가 뒤러(Dürer, A., 1471~1528)의 판화 작품 '멜랑콜리아 I (Melencolia I)'에는 오른쪽과 같은 마방진이 그려져 있다.

한편 마방진을 이용하여 가로, 세로, 대각선에 있는 수 또는 문자의 곱이 일정한 새로운 배열을 만들 수 있다. 다음 [그림 2], [그림 3]은 [그림 1]의 마방진을 이용하여 가로, 세로, 대각선에 있는 수 또는 문자의 곱이 일정하도록 만든 것이다.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

[그림 1]

2^2	2^9	2^4
2^7	2^5	2^3
2^6	2	2^8

[그림 2]

x^2	x^9	x^4
x^7	x^5	x^3
x^6	x	x^8

[그림 3]

활동 1 [그림 2], [그림 3]에서 가로, 세로, 대각선에 있는 수 또는 문자의 곱이 일정함을 지수법칙을 이용하여 설명해 보자.

활동 2 [그림 1]을 회전하거나 뒤집으면 [그림 4], [그림 5]와 같은 마방진을 얻을 수 있다. 이 두 마방진을 이용하여 가로, 세로, 대각선에 있는 단항식의 곱이 일정한 새로운 배열 [그림 6]을 완성하고 이를 설명해 보자.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

[그림 4]

4	9	2
3	5	7
8	1	6

[그림 5]

x^8y^4	xy^9	x^6y^2
		x^2y^6

[그림 6]

중단원 마무리

Ⅱ-1 단항식의 계산

정답 및 풀이 274쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 지수법칙

29쪽

m, n이 자연수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{\square}$

(2) $(a^m)^n = a^{\square}$

(3) $a \neq 0$일 때,

① $m > n$이면 $a^m \div a^n = a^{\square}$

② $m = n$이면 $a^m \div a^n = \square$

③ $m < n$이면 $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{\square}}$

(4) ① $(ab)^m = a^m b^m$

② $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^{\square}}{b^{\square}}$ (단, $b \neq 0$)

2 단항식의 곱셈과 나눗셈

34쪽

(1) 단항식의 곱셈

① 계수는 계수끼리, □는 □끼리 곱한다.

② 같은 문자의 곱은 □을 이용하여 간단히 한다.

(2) 단항식의 나눗셈

나눗셈을 □으로 바꾸거나 주어진 식을 □의 꼴로 바꾸어 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

표준 문제

01 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $a^5 \times b^3 \times a^2 \times b^6$

(2) $(a^4)^2 \times (a^3)^5$

(3) $x^{15} \div x^7 \div x^2$

(4) $(3x^2y^4)^3$

02 $\left(\dfrac{2x^4}{y^a}\right)^b = \dfrac{cx^8}{y^{12}}$일 때, 자연수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

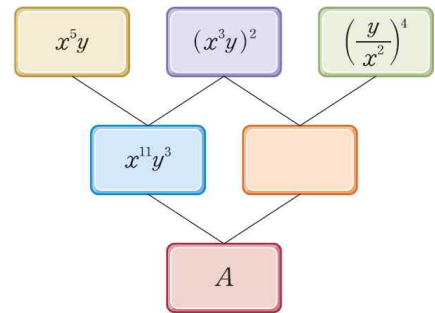
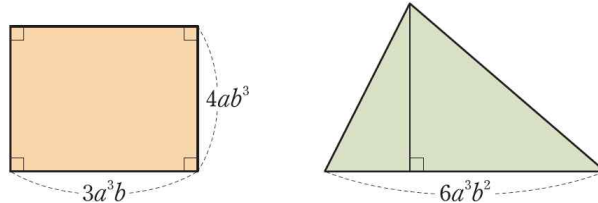
03 다음을 계산하시오.

(1) $(5a^3b^4)^2\times(-a^6b)$

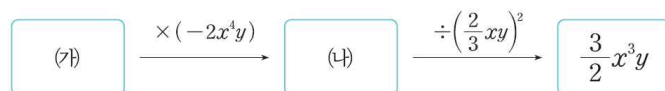
(2) $(3a^2b^6)^3\div 9a^{11}b^8$

(3) $4x^7y^{12}\times 6xy^4\div(-2xy^5)^3$

(4) $(-2xy)^4\div\left(-\frac{8}{3}y^4\right)\times x^3y^6$

04 오른쪽 그림은 이웃한 두 칸의 식을 곱하여 얻은 결과를 바로 아래 칸에 쓴 것이다. 이때 A에 알맞은 식을 구하시오.

서술형 **05** 다음 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이는 $3a^3b$, 세로의 길이는 $4ab^3$이고 삼각형의 밑변의 길이는 $6a^3b^2$이다. 직사각형의 넓이와 삼각형의 넓이가 같을 때, 물음에 답하시오.

(1) 직사각형의 넓이를 구하시오.

(2) 삼각형의 높이를 a, b의 식으로 나타내시오.

서술형 **06** 다음 계산 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

07 다음 □ 안에 알맞은 식을 구하시오.

$$(-6a^3b^5) \div \square \times 4ab^2 = 2a^3b^4$$

08 단항식 $4x^2y^3$에 어떤 단항식을 곱해야 할 것을 잘못하여 나누었더니 $-2xy^2$이 되었다. 이때 바르게 계산한 식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

도전 문제

09 $2^2=A$, $3^2=B$로 나타낼 때, 18^4을 A의 거듭제곱과 B의 거듭제곱의 곱의 꼴로 나타내시오.

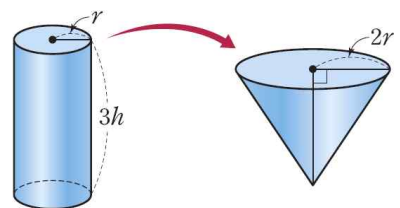
추론

10 $(2^4\times2^4\times2^4)(5^7+5^7+5^7)$이 몇 자리 자연수인지 구하려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 주어진 수를 $a\times10^n$ (단, $10<a<100$, n은 자연수)의 꼴로 나타낼 때, 상수 a, n의 값을 구하시오.

(2) (1)을 이용하여 $(2^4\times2^4\times2^4)(5^7+5^7+5^7)$이 몇 자리 자연수인지 구하시오.

문제 해결

11 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $3h$인 원기둥 모양의 그릇에 가득 들어 있는 물을 밑면의 반지름의 길이가 $2r$인 원뿔 모양의 그릇에 부었더니 물이 넘치지 않고 가득 찼다. 이때 원뿔 모양의 그릇의 높이를 h의 식으로 나타내시오.

2 다항식의 계산

준비 학습

일차식과 수의 곱셈, 나눗셈

❶ 다음을 계산하시오.

(1) $2(3a-1)$ (2) $(-5a+2)\times 3$

(3) $(-8x+12)\div 4$ (4) $(15x-5)\div(-5)$

일차식의 덧셈과 뺄셈

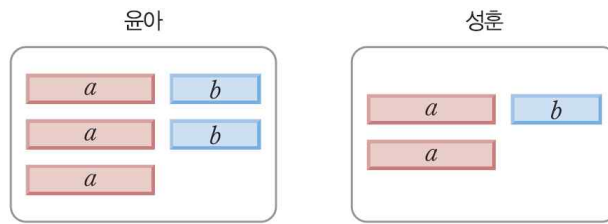
❷ 다음을 계산하시오.

(1) $3a+4a$ (2) $-2a+a+5a$

(3) $(2x-1)+(3x+6)$ (4) $(3x-4)-(7x+1)$

다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

다항식의 덧셈과 뺄셈

위의 생각톡에서 윤아와 성훈이가 가지고 있는 대수 막대의 넓이는 각각 $3a+2b$, $2a+b$이다.

한편 두 사람의 대수 막대를 모두 모으면 넓이가 a인 대수 막대는 5개, 넓이가 b인 대수 막대는 3개이므로 전체 대수 막대의 넓이는 $5a+3b$이다.

따라서

$$(3a+2b)+(2a+b)=5a+3b$$

임을 알 수 있다.

동류항은 문자와 차수가 각각 같은 항이다.

이것은 다항식의 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 다음과 같이 계산한 것과 같다.

$$\begin{aligned}(3a+2b)+(2a+b)&=3a+2b+2a+b\\&=(3a+2a)+(2b+b)\\&=5a+3b\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3a+2b \\ +)\ 2a+\ b \\ \hline 5a+3b \end{array}$$

이와 같이 다항식의 덧셈, 뺄셈은 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $(4a-3b)+(-2a+6b)$ (2) $(x-4y+3)-(2x-5y+1)$

(1) $\begin{array}{r} 4a-3b \\ +\;)\; -2a+6b \\ \hline 2a+3b \end{array}$

(2) $\begin{array}{r} x-4y+3 \\ -\;)\; 2x-5y+1 \\ \hline -x+y+2 \end{array}$

풀이 (1) $(4a-3b)+(-2a+6b)=4a-3b-2a+6b$
$=4a-2a-3b+6b$
$=2a+3b$

(2) $(x-4y+3)-(2x-5y+1)=x-4y+3-2x+5y-1$
$=x-2x-4y+5y+3-1$
$=-x+y+2$

답 (1) $2a+3b$ (2) $-x+y+2$

문제 1 다음을 계산하시오.

(1) $(5a-b)+(2a-7b)$ (2) $(x-4y+6)-(3x-y+1)$

한 문자에 대한 차수가 2인 다항식을 그 문자에 대한 이차식이라고 한다.

예를 들어 $2x^2-x+3$은 x에 대한 차수가 2인 다항식이므로 x에 대한 이차식이다. 이차식의 덧셈, 뺄셈도 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

예제 2 다음을 계산하시오.

(1) $(3a^2-4a+2)+(a^2+3a-8)$ (2) $(4x^2+x-3)-(2x^2-5x+6)$

(1) $\begin{array}{r} 3a^2-4a+2 \\ +\;)\; a^2+3a-8 \\ \hline 4a^2-a-6 \end{array}$

(2) $\begin{array}{r} 4x^2+x-3 \\ -\;)\; 2x^2-5x+6 \\ \hline 2x^2+6x-9 \end{array}$

풀이 (1) $(3a^2-4a+2)+(a^2+3a-8)=3a^2-4a+2+a^2+3a-8$
$=3a^2+a^2-4a+3a+2-8$
$=4a^2-a-6$

(2) $(4x^2+x-3)-(2x^2-5x+6)=4x^2+x-3-2x^2+5x-6$
$=4x^2-2x^2+x+5x-3-6$
$=2x^2+6x-9$

답 (1) $4a^2-a-6$ (2) $2x^2+6x-9$

문제 2 다음을 계산하시오.

(1) $(3a^2-2a+1)+(2a^2+5a-6)$ (2) $(4x^2+x-6)-(x^2-5x+7)$

문제 3 다음을 계산하시오.

(1) $a-\{3b+(-4a+3b)+8a\}$ (2) $3x^2-\{x^2-(4x-5)+2x\}-x$

추론하기

다음 대화를 읽고 두 수의 합이 11의 배수임을 소연이가 알 수 있었던 이유를 설명해 보자.

종현: 응. 생각했어.

소연: 그럼 그 수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 두 자리 자연수를 만들어 봐.

종현: 만들었어. 그다음은?

소연: 이제 생각했던 수와 만든 수를 더해.

종현: 더했어. 그러면?

소연: 그 수는 11의 배수이지?

종현: 어? 정말이네. 어떻게 알았어?

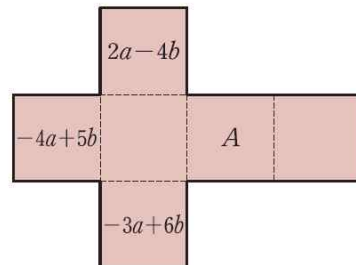
확인하기

1 다음을 계산하시오.

(1) $(-6a+5b)+(-a-4b)$ (2) $(5x-2y-1)-(7x-3y+6)$

2 다음을 계산하시오.

(1) $(-2a^2+7a-4)+(6a^2-2a-3)$ (2) $(9x^2-x)-(4x^2-2x+5)$

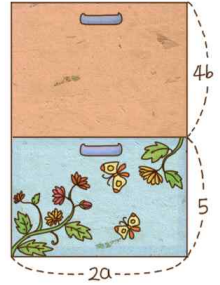
사고력 오른쪽 그림과 같은 전개도를 이용하여 정육면체를 만들었을 때, 평행한 두 면에 있는 두 다항식의 합이 모두 같다고 한다. 이때 A에 들어갈 알맞은 식을 구하시오.

다항식의 곱셈과 나눗셈

단항식과 다항식의 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

(단항식)×(다항식)의 계산

한지는 닥나무 껍질을 우리나라 전통 기법으로 가공하여 만든 종이이다. 색감과 질감이 독특해서 인형이나 보석함 등의 소품뿐 아니라 가구를 만드는 데에도 사용되고 있다. 오른쪽은 한지로 만든 서랍장의 앞면이다.

탐구 ① 앞면 전체의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 나타내 보자.

탐구 ② 앞면 전체의 넓이를 서랍장의 위 칸과 아래 칸의 앞면의 넓이의 합으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 앞면 전체의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $2a$, $4b+5$이므로 그 넓이는 $2a(4b+5)$이다.

한편 서랍장 위 칸과 아래 칸의 앞면의 넓이의 합은 $8ab+10a$이다.

따라서

$$2a(4b+5)=8ab+10a$$

임을 알 수 있다.

분배법칙
$a(b+c)=ab+ac$
$(a+b)c=ac+bc$

이것은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 계산한 것과 같다.

$$2a(4b+5)=2a\times 4b+2a\times 5=8ab+10a$$

이와 같이 다항식의 곱을 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어서 하나의 다항식으로 나타내는 것을 **전개**한다고 한다.

$2a\times(4b+5)=8ab+10a$ (전개)

전개하여 얻은 다항식을 전개식이라고 한다.

보기
① $x(5x-7)=x\times 5x-x\times 7=5x^2-7x$
② $3a(2a-6b+4)=3a\times 2a-3a\times 6b+3a\times 4=6a^2-18ab+12a$

문제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $5a(3a-b)$
(2) $(2a-9b)\times(-3a)$
(3) $4x(-x+7y-1)$
(4) $-8x(2x-y+3)$

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $a(2a-8)+7a(a+4)$ (2) $x(6x-2)-5x(x-3)$

풀이 (1) $a(2a-8)+7a(a+4)=2a^2-8a+7a^2+28a=9a^2+20a$

(2) $x(6x-2)-5x(x-3)=6x^2-2x-5x^2+15x=x^2+13x$

답 (1) $9a^2+20a$ (2) x^2+13x

문제 2 다음을 계산하시오.

(1) $4a(3a-1)+2a(-a+5)$ (2) $x(4x+6)-3x(2x-7)$

(다항식)÷(단항식)의 계산

다항식을 단항식으로 나눌 때에는 다음과 같이 나눗셈을 곱셈으로 바꾸거나 주어진 식을 분수의 꼴로 바꾸어 계산할 수 있다.

$$(A+B)\div C = (A+B)\times\frac{1}{C}$$

$$(A+B)\div C = \frac{A+B}{C}$$

$$(6a^2+8a)\div 2a=(6a^2+8a)\times\frac{1}{2a}=6a^2\times\frac{1}{2a}+8a\times\frac{1}{2a}=3a+4$$

$$(6a^2+8a)\div 2a=\frac{6a^2+8a}{2a}=\frac{6a^2}{2a}+\frac{8a}{2a}=3a+4$$

예제 2 다음을 계산하시오.

(1) $(15a^2-5a)\div 5a$ (2) $(6x^2-8xy)\div\frac{2}{3}x$

풀이 (1) $$(15a^2-5a)\div 5a=\frac{15a^2-5a}{5a}=\frac{15a^2}{5a}-\frac{5a}{5a}=3a-1$$

(2) $$(6x^2-8xy)\div\frac{2}{3}x=(6x^2-8xy)\times\frac{3}{2x}=6x^2\times\frac{3}{2x}-8xy\times\frac{3}{2x}=9x-12y$$

답 (1) $3a-1$ (2) $9x-12y$

문제 3 다음을 계산하시오.

(1) $(9a^2b-6ab)\div 3a$　　　　(2) $(-4x^2y^2+12xy)\div\left(-\frac{4}{5}xy\right)$

예제 3 $(8xy^2-12x^2y)\div 4xy-(2xy-6y^2)\div\frac{y}{3}$를 계산하시오.

풀이 $(8xy^2-12x^2y)\div 4xy-(2xy-6y^2)\div\frac{y}{3}$

$=(8xy^2-12x^2y)\times\frac{1}{4xy}-(2xy-6y^2)\times\frac{3}{y}$

$=\left(8xy^2\times\frac{1}{4xy}-12x^2y\times\frac{1}{4xy}\right)-\left(2xy\times\frac{3}{y}-6y^2\times\frac{3}{y}\right)$

$=(2y-3x)-(6x-18y)$

$=2y-3x-6x+18y$

$=-9x+20y$

답 $-9x+20y$

문제 4 다음을 계산하시오.

(1) $(6ab^2-8ab)\div(-2b)-(3ab^2+ab)\div\frac{b}{4}$

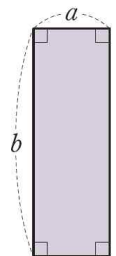
(2) $(6x-7)\times 4x-(40x^2-25x)\div(-5x)$

식의 대입

오른쪽 그림은 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형이다. 이 직사각형의 세로의 길이는 가로의 길이의 3배이다.

탐구① 이 직사각형의 둘레의 길이를 a, b의 식으로 나타내 보자.

탐구② 세로의 길이가 가로의 길이의 3배임을 이용하여 b를 a의 식으로 나타내 보자.

탐구③ 위의 탐구②를 이용하여 탐구①에서 구한 둘레의 길이를 a의 식으로 나타내 보자.

앞의 생각톡에서 직사각형의 둘레의 길이는 $2a+2b$이고 세로의 길이가 가로의 길이의 3배이므로 $b=3a$이다.

따라서 $2a+2b$의 b에 $3a$를 대입하여

$$\begin{aligned}2a+2b&=2a+2\times 3a\\&=2a+6a=8a\end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 주어진 식의 문자에 그 문자가 나타내는 다른 식을 대입하여 주어진 식을 다른 문자의 식으로 나타낼 수 있다.

예제 4 $y=2x-1$일 때, $x-3y+5$를 x의 식으로 나타내시오.

다항식을 대입할 때에는 괄호를 사용한다.

풀이 $x-3y+5$의 y에 $2x-1$을 대입하면

$$\begin{aligned}x-3y+5&=x-3(2x-1)+5\\&=x-6x+3+5\\&=-5x+8\end{aligned}$$

답 $-5x+8$

문제 5 $a=3b-4$일 때, 다음을 b의 식으로 나타내시오.

(1) $5a-8b$ (2) $-2a+9b-13$

확인하기

1 다음을 계산하시오.

(1) $-5ab(3a-b)$

(2) $(4x^2-8x)\div\frac{1}{2}x$

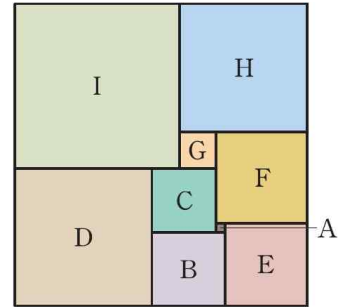
(3) $2a(a-1)+(18a^2-6a)\div(-3a)$

2 $x=2(y-3)$일 때, $4x-9y+25$를 y의 식으로 나타내시오.

정사각형 분할

추론 문제 해결

하나의 직사각형을 여러 개의 작은 정사각형으로 나누는 것을 정사각형 분할이라고 한다. 예를 들어 오른쪽 그림은 직사각형을 9개의 정사각형으로 분할한 것이다.

정사각형 A의 한 변의 길이를 x, 정사각형 B의 한 변의 길이를 y라 하고 정사각형과 직사각형의 관계를 알아보자.

활동 1 다음 표를 완성하고, 처음 도형이 직사각형임을 이용하여 x, y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자.

정사각형	A	B	C	D	E	F	G	H	I
한 변의 길이	x	y							

활동 2 활동 1에서 구한 식을 이용하여 다음 표를 x의 식으로 완성하고, 각 정사각형의 넓이의 합을 구해 보자.

정사각형	A	B	C	D	E	F	G	H	I
한 변의 길이	x								
넓이	x^2								

활동 3 처음 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x의 식으로 나타내어 그 넓이를 구한 후, 활동 2에서 구한 넓이의 합과 비교해 보자.

중단원 마무리

Ⅱ-2 다항식의 계산

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 다항식의 덧셈과 뺄셈 ▶ 42쪽

괄호를 풀고 ☐끼리 모아서 계산한다.

❷ 다항식의 곱셈과 나눗셈 ▶ 45쪽

(1) (단항식)×(다항식)의 계산

☐을 이용하여 단항식을 다항식의 각 항에 곱하여 계산한다.

(2) 다항식의 곱을 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어서 하나의 다항식으로 나타내는 것을 ☐한다고 한다.

(3) (다항식)÷(단항식)의 계산

나눗셈을 ☐으로 바꾸거나 주어진 식을 ☐의 꼴로 바꾸어 계산한다.

표준 문제

01 다음을 계산하시오.

(1) $(5a-3b)+(-7a+6b)$

(2) $(2a-b-8)-(4a+9b-1)$

(3) $(-4x^2-3x+1)+(x^2+2x-7)$

(4) $(2x^2-6x+5)-(-x^2+4x)$

02 $(a-7b+4)-2(5a-2b-3)$을 계산했을 때, a의 계수와 상수항의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

03 $\dfrac{x-7y}{3}+\dfrac{4x-2y}{5}=ax+by$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

04 다음을 만족시키는 두 다항식 A, B를 구하시오.

$$(2x^2-x+5)+A=x^2-3x+8 \qquad (x^2-7x+6)-B=-4x+11$$

서술형

05 어떤 다항식에서 $-a+4b-5$를 빼야 할 것을 잘못하여 더했더니 $6a-2b+1$이 되었다. 이때 바르게 계산한 식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

06 $-3x(x+2y+7)$을 전개한 식의 x^2의 계수와 $5x(-x+6y+4)$를 전개한 식의 xy의 계수를 각각 구하시오.

07 $\boxed{}\times\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)=6x^3y-4x^2y^2$일 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 다항식을 구하시오.

08 $-x(5x-9y)+(2x^2y-10xy)\div\frac{2}{3}x$를 계산하시오.

09 $y=-2x+4$일 때, $7x^2-6xy-3$을 x의 식으로 나타내시오.

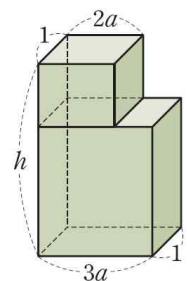
도전 문제

서술형 **10** $5a-[2b-a-\{3a-(\square+4b)\}]=10a-8b$일 때, $\square$ 안에 알맞은 다항식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론 **11** 다음에서 가로 방향은 이웃한 두 칸의 식을 더하여 오른쪽 옆 칸에, 세로 방향은 위 칸의 식에서 아래 칸의 식을 빼서 맨 아래 칸에 적은 것이다. 이때 (ㄱ), (ㄴ)에 알맞은 식을 구하시오.

$3a^2+2$	(ㄱ)	a^2-a-2
	$2a^2-5a$	(ㄴ)
a^2+3a+1		

문제 해결 **12** 오른쪽 그림과 같이 밑면의 가로의 길이가 $3a$, 세로의 길이가 1인 직육면체 위에 밑면의 가로의 길이가 $2a$, 세로의 길이가 1인 직육면체를 쌓았다. 큰 직육면체의 부피가 $9a^2+6ab$, 작은 직육면체의 부피가 $4a^2-2ab$일 때, 전체 높이 h를 구하시오.

정답 및 풀이 277쪽

01 다음에서 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

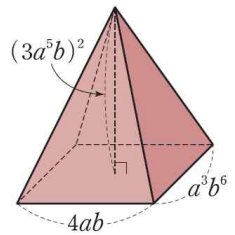
① $x^3 \times x^2 = x^6$
② $(x^5)^3 = x^{15}$
③ $x^6 \div x^3 = x^2$
④ $(x^4)^3 \div (x^2)^6 = 1$
⑤ $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^2 = \dfrac{x}{y^4}$

02 다음에서 □ 안에 들어갈 수가 가장 큰 것은?

① $a^3 \times a^{\square} = a^7$
② $(a^2)^{\square} = a^6$
③ $a^{10} \div a^{\square} = a^5$
④ $(2a)^{\square} = 8a^3$
⑤ $(a^3)^3 \times a^{\square} \div a^9 = a^2$

03 $30 \times 40 \times 50 \times 60 = 2^x \times 3^y \times 5^z$일 때, 자연수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값을 구하시오.

04 $(6a^2b)^2 \times (ab^4)^3 \div 9a^8b^7$을 계산하시오.

05 오른쪽 그림과 같이 밑면은 가로의 길이가 $4ab$, 세로의 길이가 a^3b^6인 직사각형이고, 높이가 $(3a^5b)^2$인 사각뿔의 부피를 구하시오.

06 $-x^2+5x-4$에서 어떤 식을 뺐더니 x^2-5가 되었다. 이때 어떤 식을 구하시오.

07 $3y-[2x-\{5(x-y)+4y\}-6]$을 계산하시오.

08 다음에서 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $2x(x-y)=2x^2-xy$

② $-3a(a-b+5)=-3a^2+3ab-15$

③ $(9x^2y^4-6xy)\div 3xy=3xy^3-2$

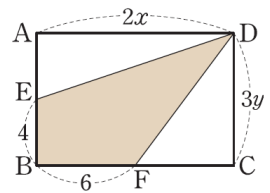
④ $(12x^3y^4-8y^5)\div(-4y^2)=-3x^3y+2y$

⑤ $(4a^2b^6-2a^5b^7)\div\left(-\frac{1}{2}ab\right)=-8ab^5+4a^4b^6$

09 $\frac{-12x^2+9xy}{-3x}-\frac{8y^2-4xy}{2y}$를 계산했을 때, 모든 항의 계수의 합을 구하시오.

10 다음 □안에 알맞은 식을 구하시오.

$2x(6x-5)-9x\times$ □ $=-15x^2+8x$

11 오른쪽 직사각형 ABCD에서 두 점 E, F는 각각 변 AB, BC 위의 점이고 $\overline{AD}=2x$, $\overline{BE}=4$, $\overline{BF}=6$, $\overline{DC}=3y$이다. 이때 사각형 EBFD의 넓이를 x, y의 식으로 나타내시오.

12 $A=2(x-3y)-5(4x-y)$이고 $B=\frac{8x-6y}{2}-\frac{9x-12y}{3}$일 때, $A+2B$를 x, y의 식으로 나타내시오.

서술형

13 $3^{10} \times 9^{20}$의 일의 자리의 숫자를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

14 $(-2x^3y)^A \div x^By \times 6xy^5 = Cx^4y^6$일 때, 자연수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 $2(x^2-4x-3)-(ax^2-2x+5)$를 계산했을 때, x^2의 계수와 상수항의 합이 1이다. 이때 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 $a=\frac{7}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$일 때, 다음 식의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

$$(-ab+b^2)\div\left(-\frac{1}{5}b\right)-(12a^2b-8ab^2)\div 4ab$$

풀이

자기 평가

① 지수법칙을 이해할 수 있다.

② 단항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

③ 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

④ 단항식과 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트 수학 연대표 만들기

거듭제곱과 지수법칙을 이용하면 아주 큰 수와 아주 작은 수를 간단히 나타낼 수 있고 이 수들을 편리하게 계산할 수 있다. 현재 우리가 수학에서 사용하는 표기법과 법칙은 많은 수학자들이 노력하여 좀 더 쉽고 편리하고 가장 효율적인 것으로 발전시킨 결과물이다.

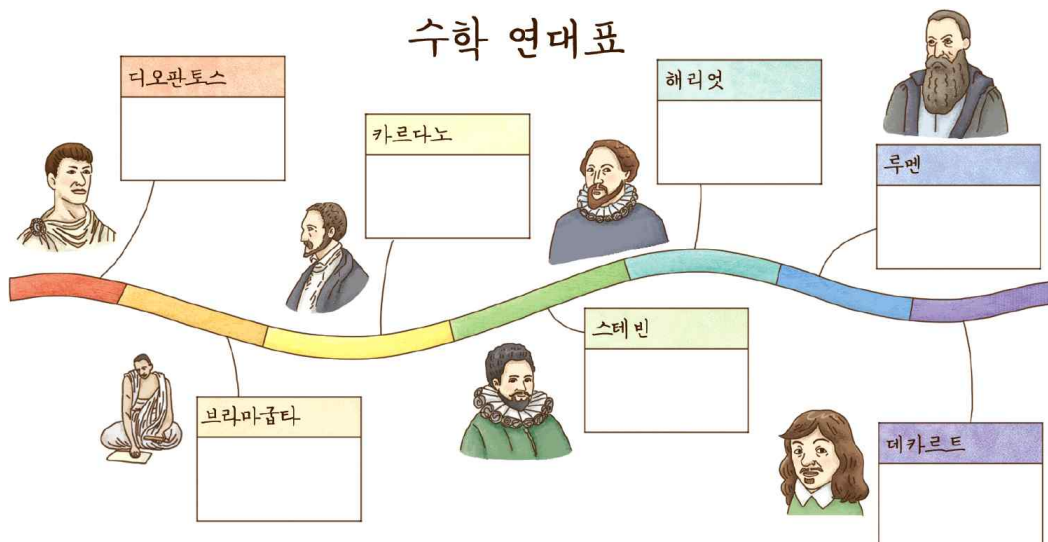
다음은 거듭제곱의 표기법을 조사하여 정리한 표이다.

수학자	업적
디오판토스(Diophantos, 200?~284?)	x^3을 K^Y로 표기
스테빈(Stevin, S., 1548~1620)	미지수 없이 x를 ①, $5x^3$을 5③으로 표기
해리엇(Harriot, T., 1560~1621)	a^3을 aaa로 표기
루멘(Roomen, A. V., 1561~1615)	A^4을 $A(4)$로 표기
데카르트(Descartes, R., 1596~1650)	지수를 작게 써서 2^3, a^n과 같이 표기하고 지수가 2인 경우는 aa와 같이 표기

(출처: Florian Cajori, 『A History of Mathematical Notations』)

과제 1 x^2을 스테빈, 해리엇, 루멘의 방법으로 각각 나타내 보자.

과제 2 브라마굽타, 카르다노 등의 수학자도 수학 표기법의 발달에 중요한 역할을 하였다. 이러한 수학자들의 주요 업적을 조사하여 한눈에 볼 수 있는 수학 연대표를 만들어 보자.

생활 속 불쾌지수

기상청에서는 날씨뿐만 아니라 불쾌지수, 자외선 지수, 체감 온도 등과 같은 생활기상지수도 제공한다. 이러한 생활기상지수는 기상 요소가 우리 생활에 영향을 미치는 정도를 수치로 표현한 것으로 일상생활에서 유용하게 쓰인다.

불쾌지수

기온과 습도에 따라 사람이 불쾌감을 느끼는 정도를 수치화한 것으로 온습지수라고도 한다.

자외선 지수

태양 고도가 최대인 남중 시각 때 지표에 도달하는 자외선 B(UV-B) 영역의 복사량을 지수로 환산한 것이다.

체감 온도

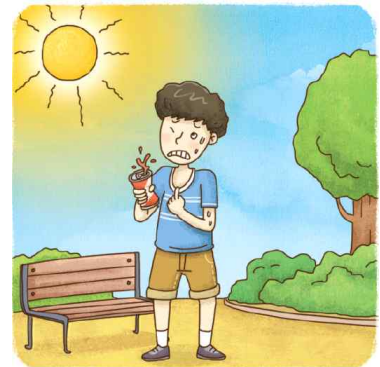
사람이 피부를 통해 느끼는 온도로 외부에 있는 사람이 덥거나 춥다고 느끼는 정도를 수량으로 나타낸 것이다.

기온이란 지표면 위 $1.5\,\mathrm{m}$ 높이에 있는 공기의 온도이고, 습구 온도란 건습계에서 젖은 헝겊으로 싼 부분에 증류수를 묻혀 일정한 속력의 바람을 통하게 한 후 측정한 온도이다.

불쾌지수 D는 기온이 a ℃, 습구 온도가 b ℃일 때, 다음 식을 이용하여 얻을 수 있다.

$$D=0.72(a+b)+40.6$$

기온과 습구 온도를 알 때 위의 식을 이용하여 얻은 불쾌지수에 따른 불쾌감의 정도 및 대응 요령은 다음과 같다.

단계	지수 범위	불쾌감을 느끼는 정도 및 대응 요령
매우 높음	80 이상	전원 불쾌감을 느낌 어린이, 노약자 등 더위에 취약한 사람들은 야외 활동을 자제함
높음	75 이상 80 미만	50% 정도 불쾌감을 느낌 어린이, 노약자 등 더위에 취약한 사람들은 12~17시 사이에는 야외 활동을 자제하거나 가벼운 옷 입기
보통	68 이상 75 미만	불쾌감을 나타내기 시작함 어린이, 노약자 등 더위에 취약한 사람들은 야외 활동 시 가벼운 옷 입기
낮음	68 미만	전원 쾌적함을 느낌

(출처: 기상청, 2017)

이와 같이 실생활에서 문자를 포함한 식의 계산은 유용하게 활용되고 있다.

기상 예보관 | 각종 기상 관측 자료를 분석하여 일기 예보를 하고, 기상 현상에 대한 각종 주의보와 경보 및 기상 전망을 발표한다.

III 부등식과 방정식

배운 내용 — **이 단원의 내용** — **배울 내용**

배운 내용

초 5~6
- 수의 범위

중 수학 1
- 정수와 유리수
- 문자의 사용
- 일차방정식

이 단원의 내용

1 일차부등식
- 부등식
- 일차부등식

2 연립일차방정식
- 연립일차방정식
- 연립방정식의 풀이

배울 내용

중 수학 3
- 이차방정식

고 수학
- 여러 가지 방정식과 부등식

12
영화 시간을 선택할 때, 조조 영화 할인 혜택과 제휴 카드 할인 혜택 중 어느 것이 더 이익일까? **수 또는 식의 대소 관계**를 이용하면 합리적인 선택을 할 수 있다. 또한 미지수가 2개인 일차방정식을 이용하면 가진 돈으로 팝콘과 음료수를 각각 몇 개씩 살 수 있는지 알 수 있다. 이 단원에서는 일차부등식과 연립일차방정식을 알아보고, 이와 관련된 문제를 해결하는 방법을 알아본다.
Box
○○카드
10%
○○카드

1 일차부등식

준비 학습

부등호

❶ 다음 문장을 부등호를 사용하여 나타내시오.

(1) x는 3보다 크거나 같다.

(2) x는 5보다 작다.

(3) x는 6 초과이다.

(4) x는 2보다 크고, 7보다 작거나 같다.

문자를 사용한 식

❷ 한 자루에 600원인 형광펜 x자루와 한 자루에 800원인 볼펜 y자루를 살 때의 금액을 x, y에 대한 식으로 나타내시오.

부등식

부등식과 그 해의 의미를 알고, 부등식의 성질을 이해한다.

부등식과 그 해

그린 푸드 존(Green Food Zone)이란 어린이 식품 안전 보호 구역을 말하는데 불량 식품을 집중적으로 감시하고 안전한 먹을거리를 판매하도록 특별히 지정해 놓은 구역이다. 「어린이 식생활 안전관리 특별법」에 따라 학교로부터 일정한 거리 이내에 있는 문방구, 슈퍼마켓에서는 어린이의 건강을 해치는 식품을 판매할 수 없다.

(출처: 두산백과사전, 2017)

탐구 학교로부터 직선거리가 200 m 이하인 구역을 어린이 식품 안전 보호 구역으로 지정하였다. 학교로부터 직선거리가 a m인 지점이 이 구역에 있을 때, 이것을 부등호를 사용하여 나타내 보자.

'9는 2보다 크다.'와 'x를 3배하여 7을 더하면 10보다 작거나 같다.'를 부등호를 사용하여 각각

$$9>2, \quad 3x+7\le 10$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 부등호 $>$, $<$, $\ge$, $\le$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 **부등식**이라고 한다.

참고 등식에서와 마찬가지로 부등식에서도 부등호의 왼쪽 부분을 좌변, 오른쪽 부분을 우변이라 하고, 좌변과 우변을 통틀어 양변이라고 한다.

문제 1 다음 문장을 부등식으로 나타내시오.

(1) x에서 2를 뺀 후 5배하면 10보다 크다.

(2) 1회 이용 요금이 750원인 마을버스를 한 달 동안 x회 이용한 요금은 15000원 이하이다.

(3) 한 자루에 1300원인 색연필 x자루의 값과 배송료 2500원의 합은 10000원 미만이다.

부등식 $x+4<7$의 x에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하여 부등식이 참이 되는지 알아보면 다음과 같다.

x의 값	좌변의 값	대소 비교	우변의 값	참, 거짓
1	$1+4=5$	$<$	7	참
2	$2+4=6$	$<$	7	참
3	$3+4=7$	$=$	7	거짓
4	$4+4=8$	$>$	7	거짓

위의 표에서 부등식 $x+4<7$은 x의 값이 1, 2일 때 참이 되고 x의 값이 3, 4일 때 거짓이 된다.

이와 같이 미지수 x를 포함한 부등식이 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 그 부등식의 해라 하고, 부등식의 해를 모두 구하는 것을 부등식을 푼다고 한다.

예를 들어 x가 1, 2, 3, 4일 때 부등식 $x+4<7$은 x의 값이 1, 2일 때 참이 되므로 1, 2는 이 부등식의 해이다.

예제 1 x가 4 이하의 자연수일 때, 부등식 $2x-1 \geq 5$를 푸시오.

풀이 부등식 $2x-1 \geq 5$의 x에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$x=1$일 때, $2\times1-1=1<5$ ➔ $2x-1\geq5$는 거짓

$x=2$일 때, $2\times2-1=3<5$ ➔ $2x-1\geq5$는 거짓

$x=3$일 때, $2\times3-1=5=5$ ➔ $2x-1\geq5$는 참

$x=4$일 때, $2\times4-1=7>5$ ➔ $2x-1\geq5$는 참

따라서 구하는 부등식의 해는 3, 4이다.

답 3, 4

문제 2 x가 3 이하의 자연수일 때, 다음 부등식을 푸시오.

(1) $7x+1>9$

(2) $4x-3 \leq 2x+1$

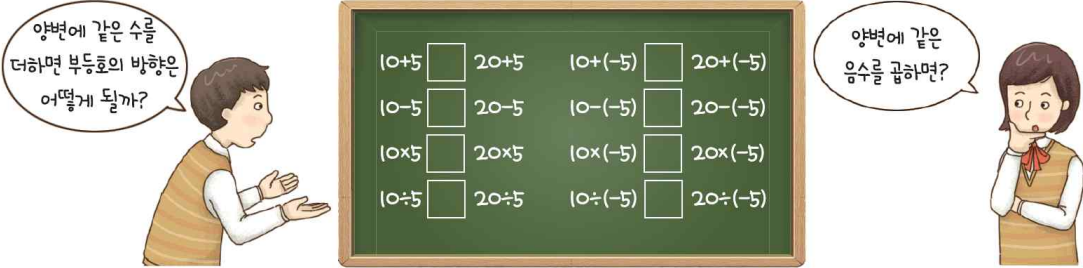
찾아보기

다음과 같이 부등식으로 나타낼 수 있는 상황을 우리 주변에서 찾아보고, 이를 부등식으로 나타내 보자.

예 총인구 중 65세 이상의 인구 비율이 20% 이상인 사회를 초고령 사회라고 한다.

➔ 총인구 중 65세 이상의 인구 비율을 x%라고 할 때, 초고령 사회가 되는 x의 값의 범위를 부등식으로 나타내면 $x \geq 20$이다.

부등식의 성질

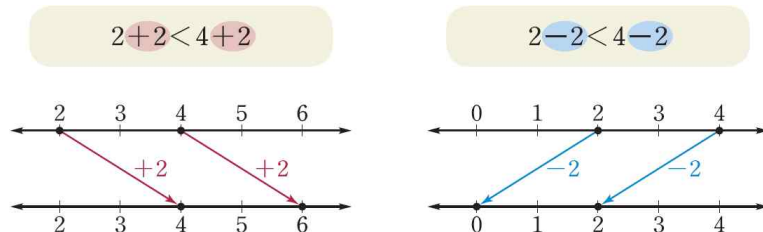
다음은 부등식 $10 < 20$에 대하여 민준이와 하영이가 나눈 대화이다.

탐구① □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어 보자.

탐구② 탐구①에서 부등식 $10 < 20$과 비교하여 부등호의 방향이 반대인 경우를 말해 보자.

부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 뺄 때, 부등호의 방향을 알아보자.

부등식 $2 < 4$의 양변에 2를 더하거나 양변에서 2를 빼면 다음과 같이 부등호의 방향이 바뀌지 않음을 알 수 있다.

$2+2<4+2$

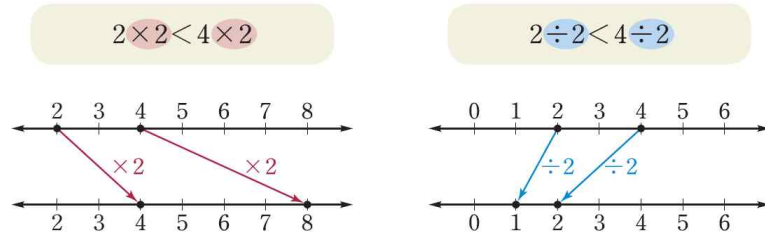
$2-2<4-2$

일반적으로 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

문제 3 $a < b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a+3$ □ $b+3$ (2) $a-5$ □ $b-5$

(3) $a+(-7)$ □ $b+(-7)$ (4) $a-(-4)$ □ $b-(-4)$

부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나눌 때, 부등호의 방향을 알아보자.

부등식 $2<4$의 양변에 2를 곱하거나 양변을 2로 나누면 다음과 같이 부등호의 방향이 바뀌지 않음을 알 수 있다.

일반적으로 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

문제 4 $a<b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

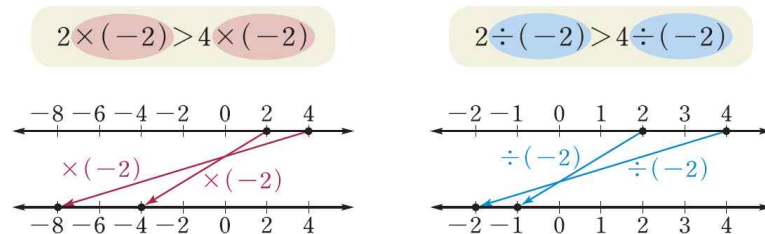
(1) $a\times4$ □ $b\times4$

(2) $a\div5$ □ $b\div5$

(3) $\frac{2}{3}a$ □ $\frac{2}{3}b$

(4) $\frac{a}{6}$ □ $\frac{b}{6}$

부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나눌 때, 부등호의 방향을 알아보자.

부등식 $2<4$의 양변에 -2를 곱하거나 양변을 -2로 나누면 다음과 같이 부등호의 방향이 바뀜을 알 수 있다.

일반적으로 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

문제 5 $a<b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a\times(-8)$ □ $b\times(-8)$　　(2) $a\div(-3)$ □ $b\div(-3)$

(3) $-5a$ □ $-5b$　　(4) $-\frac{a}{9}$ □ $-\frac{b}{9}$

일반적으로 부등식에서 다음과 같은 성질이 성립한다.

부등식의 성질

❶ 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$a<b$이면　$a+c<b+c,\ a-c<b-c$

❷ 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$a<b,\ c>0$이면　$ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

❸ 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

$a<b,\ c<0$이면　$ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

참고 위의 부등식의 성질은 부등호 $<$를 $\le$로, $>$를 $\ge$로 바꾸어도 성립한다.

예제 2 $a<b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $4a-3$ □ $4b-3$　　(2) $-2a+5$ □ $-2b+5$

풀이 (1) $a<b$의 양변에 4를 곱하면 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로

$4a<4b$

또 $4a<4b$의 양변에서 3을 빼면 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로

$4a-3<4b-3$

(2) $a<b$의 양변에 -2를 곱하면 부등호의 방향이 바뀌므로

$-2a>-2b$

또 $-2a>-2b$의 양변에 5를 더하면 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로

$-2a+5>-2b+5$

답 (1) $<$　(2) $>$

문제 6 $a \geq b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $2a+7$ □ $2b+7$ (2) $5a-3$ □ $5b-3$

(3) $-a-4$ □ $-b-4$ (4) $-\dfrac{a}{3}+1$ □ $-\dfrac{b}{3}+1$

문제 7 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $-3a \leq -3b$일 때, a □ b (2) $8a-5 < 8b-5$일 때, a b

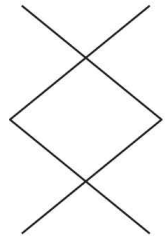
설명하기 등식의 성질과 부등식의 성질을 비교하여 말해 보자.

이야기 수학

부등호의 역사

부등호 $>$와 $<$는 영국의 수학자 해리엇(Harriot, T., 1560~1621)의 책 『해석술 연습(Artis Analyticae Praxis)』에서 처음으로 사용되었다. 해리엇은 미국에서 1년간 머물면서 인디언들을 연구하였고 그들의 그림에서 영감을 얻어 부등호를 만들었다는 이야기가 있다.

또한 '크거나 같다.'와 '작거나 같다.'를 나타내는 부등호는 프랑스의 지구 물리학자 부게르(Bouguer, P., 1698~1758)가 1734년에 처음으로 ≧와 ≦를 사용했고 현재 이 기호는 일반적으로 $\geq$와 $\leq$로 간략하게 나타내어 사용되고 있다.

(출처: Florian Cajori, 『A History of Mathematical Notations』, 허민, 『수학자의 뒷모습 II』)

확인하기

1 다음에서 2를 해로 갖는 부등식을 모두 찾으시오.

(1) $1-3x \geq -5$ (2) $2x+1 \leq x-5$

(3) $1-\dfrac{x}{2} > \dfrac{x}{3}$ (4) $\dfrac{2x+1}{3} \geq 1$

2 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a > b$일 때, $9a-5$ □ $9b-5$

(2) $8-a < 8-b$일 때, a □ b

(3) $-\dfrac{1}{7}a-2 \geq -\dfrac{1}{7}b-2$일 때, a □ b

일차부등식

일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

일차부등식의 풀이

부등식 $2x>-7$을 부등식의 성질을 이용하여 우변이 0이 되도록 고치려고 한다.

탐구 ① □ 안에 알맞은 식을 구해 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 식의 차수를 말해 보자.

부등식 $6x>3$의 양변에서 3을 빼면 다음과 같다.

$$6x-3>0$$

이것은 $6x>3$의 우변의 3의 부호를 바꾸어 좌변으로 옮긴 것과 같다.

이와 같이 부등식에서도 등식과 마찬가지로 한 변에 있는 항을 다른 변으로 이항할 수 있다.

한편 부등식 $6x-3>0$의 좌변 $6x-3$은 x에 대한 일차식이고 우변은 0이다.

이와 같이 부등식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

$$(\text{일차식})>0,\quad (\text{일차식})<0,\quad (\text{일차식})\geq 0,\quad (\text{일차식})\leq 0$$

중 어느 하나의 꼴로 나타내는 부등식을 **일차부등식**이라고 한다.

보기 ❶ 부등식 $x+1<-2x$에서 우변의 $-2x$를 좌변으로 이항하여 정리하면 $3x+1<0$이므로 이 부등식은 일차부등식이다.

❷ 부등식 $x+5>x$에서 우변의 x를 좌변으로 이항하여 정리하면 $5>0$이므로 이 부등식은 일차부등식이다.

문제 1 다음에서 일차부등식을 모두 찾으시오.

(1) $2x\geq -9$

(2) $5x+6\leq 5x-1$

(3) $4(x-1)>x+5$

(4) $x^2+3x<x-7$

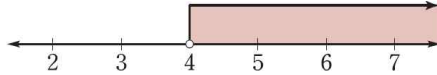
일차부등식 $x-1>3$을 풀어 보자.

부등식 $x-1>3$에서 좌변의 -1을 우변으로 이항하여 정리하면

$x>3+1$, 즉 $x>4$

이다. 이때 4보다 큰 모든 수는 부등식 $x-1>3$을 만족시킨다.

따라서 부등식 $x-1>3$의 해는 $x>4$이고, 이것을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

수직선에서 '○'에 대응하는 수는 부등식의 해에 포함되지 않고, '●'에 대응하는 수는 부등식의 해에 포함된다.

일반적으로 x에 대한 일차부등식은 부등식의 성질을 이용하여 주어진 부등식을

$x>(수)$, $x<(수)$, $x \geq (수)$, $x \leq (수)$

중 어느 하나의 꼴로 바꾸어 해를 구할 수 있다.

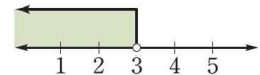
예제 1 다음 일차부등식을 풀고, 그 해를 수직선 위에 나타내시오.

(1) $2x-5<1$　　(2) $3x+8 \leq 6x+2$

풀이 (1) -5를 이항하면　$2x<1+5$

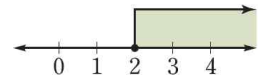
우변을 정리하면　$2x<6$

양변을 2로 나누면　$x<3$

따라서 이 부등식의 해는 $x<3$이고, 이것을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

(2) 8과 $6x$를 각각 이항하면　$3x-6x \leq 2-8$

양변을 정리하면　$-3x \leq -6$

양변을 -3으로 나누면　$x \geq 2$

따라서 이 부등식의 해는 $x \geq 2$이고, 이것을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

문제 2 다음 일차부등식을 풀고, 그 해를 수직선 위에 나타내시오.

(1) $7x \geq 4x+9$　　(2) $x-4<3x$

(3) $8x+1 \leq 6x-7$　　(4) $4x-3>8x-11$

괄호가 있는 일차부등식은 먼저 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어 정리한 후 부등식을 푼다.

예제 2 일차부등식 $3(x+1) > 5x-7$을 푸시오.

풀이 좌변에 있는 괄호를 풀면

$$3x+3 > 5x-7$$
$$3x-5x > -7-3$$
$$-2x > -10$$
$$x < 5$$

답 $x < 5$

문제 3 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $4(x-2) \geq 7x+1$

(2) $7(x-1) \leq 5(x-3)+9$

계수가 소수인 일차부등식은 양변에 10, 100, 1000, …과 같은 수를 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

예제 3 일차부등식 $0.5x-1 \geq 0.2x+0.8$을 푸시오.

풀이 양변에 10을 곱하면

$$5x-10 \geq 2x+8$$
$$5x-2x \geq 8+10$$
$$3x \geq 18$$
$$x \geq 6$$

답 $x \geq 6$

문제 4 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $0.2x+1.2 > 0.5x$

(2) $2-0.1x \leq 0.3x+0.8$

계수가 분수인 일차부등식은 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

예제 4 일차부등식 $\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}\le-\frac{1}{6}x$를 푸시오.

풀이 양변에 분모의 최소공배수인 6을 곱하면

$$3x+8\le -x$$
$$3x+x\le -8$$
$$4x\le -8$$
$$x\le -2$$

답 $x\le -2$

문제 5 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $\frac{1}{4}x<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}x$　　(2) $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}x\ge\frac{5}{2}x-2$

일차부등식의 풀이 방법을 정리하면 다음과 같다.

일차부등식의 풀이

❶ 계수가 소수 또는 분수이면 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친다.

❷ 괄호가 있으면 괄호를 풀어 정리한다.

❸ 미지수 x를 포함하는 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항하여 다음 중 하나의 꼴로 정리한다. (단, $a\ne0$)

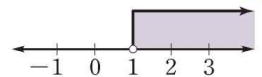
$$ax>b,\ ax<b,\ ax\ge b,\ ax\le b$$

❹ 양변을 x의 계수 a로 나눈다. 이때 a가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

표현하기

부등식 $ax+b>c$의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 조건을 만족시키는 일차부등식을 하나씩 만들어 보자.

(1) a, b, c가 0이 아닌 정수

(2) a, b, c가 소수 또는 분수

일차부등식의 활용

여러 가지 수량과 관련된 문제 중에는 일차부등식을 활용하여 해결할 수 있는 경우가 있다.

경민이는 체육 대회 때 쓸 응원 도구로 3500원짜리 현수막 1개와 400원짜리 막대풍선 몇 개를 사려고 한다. 전체 금액이 10000원 이하가 되게 하려고 할 때, 막대풍선은 최대 몇 개까지 살 수 있는지 구하시오.

위의 문제를 다음과 같은 순서로 해결해 보자.

미지수 정하기 막대풍선을 x개 산다고 하자.

부등식 세우기 현수막 1개의 값은 3500원, 막대풍선 x개의 값은 $400x$원이고, 전체 금액이 10000원 이하이어야 하므로

$$3500+400x \le 10000$$

부등식 풀기 이 부등식을 풀면

$$400x \le 6500$$

$$x \le 16.25$$

그런데 x는 자연수이므로 막대풍선은 최대 16개까지 살 수 있다.

확인하기 막대풍선 16개를 사면 $3500+400\times16=9900\le10000$이고, 17개를 사면 $3500+400\times17=10300>10000$이므로 최대로 살 수 있는 막대풍선의 개수 16은 문제의 뜻에 맞는다.

일반적으로 일차부등식을 활용하여 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 해결하면 편리하다.

일차부등식을 활용하여 문제를 푸는 순서

1. 미지수 정하기 문제의 뜻을 이해하고, 구하려는 값을 미지수 x로 놓는다.
2. 부등식 세우기 문제의 뜻에 맞게 x에 대한 일차부등식을 세운다.
3. 부등식 풀기 일차부등식을 푼다.
4. 확인하기 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

문제 6 종이컵 수거함에 종이컵이 한 개 더 쌓일 때마다 종이컵의 전체 높이는 0.5 cm씩 높아진다고 한다. 현재 종이컵 수거함에 쌓인 종이컵의 전체 높이가 12 cm이고 종이컵을 1 m까지 쌓을 수 있다고 할 때, 종이컵은 최대 몇 개 더 쌓을 수 있는지 구하시오.

예제 5 상원이는 기차가 출발하기 전까지 40분의 여유가 있어서 상점에 가서 물건을 사오려고 한다. 물건을 사는 데 10분이 걸리고 시속 4 km로 걷는다고 할 때, 기차역에서 최대 몇 km 떨어진 상점까지 갔다 올 수 있는지 구하시오.

풀이 ❶ 기차역에서 x km 떨어진 상점까지 갔다 올 수 있다고 하자.

❷ 상점에 갈 때 걸리는 시간과 올 때 걸리는 시간은 각각 $\frac{x}{4}$시간이고 물건을 사는 데 걸리는 시간은 10분, 즉 $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$(시간)이다.

이때 여유 시간은 40분, 즉 $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$(시간)이므로

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{6}+\frac{x}{4} \le \frac{2}{3}$$

❸ 부등식을 풀면

$$3x+2+3x \le 8, \quad 6x \le 6, \quad x \le 1$$

따라서 최대 1 km 떨어진 상점까지 갔다 올 수 있다.

❹ 1 km 떨어진 상점에 다녀오는 데 걸리는 시간은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$(시간), 즉 40분이므로 문제의 뜻에 맞는다.

답 1 km

문제 7 준수는 친구와 도서관에서 오후 5시 30분에 만나기로 하였다. 준수는 오후 5시 10분에 집에서 출발하여 분속 50 m로 걷다가 도중에 늦을 것 같아서 분속 90 m로 걸었더니 약속 시각에 늦지 않았다. 준수네 집에서 도서관까지의 거리가 1.2 km일 때, 준수가 분속 90 m로 걸은 거리는 최소 몇 m인지 구하시오.

확인하기

1 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $2x-9 \le 7x+11$

(2) $5(x-1) < 8-(x+7)$

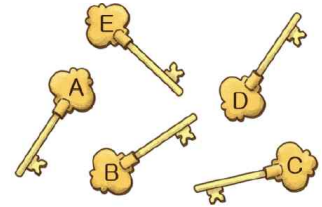
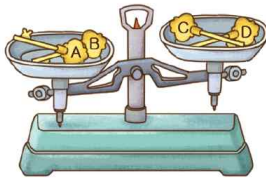
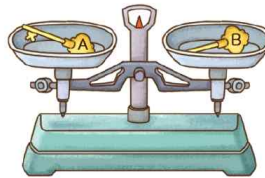
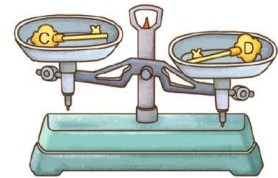
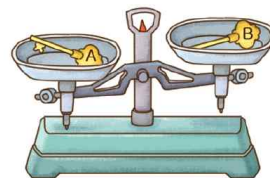
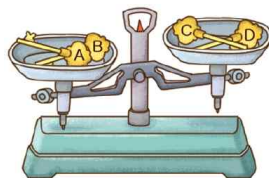
(3) $0.07x \ge 0.12x-0.6$

(4) $0.4x-\frac{1}{4} > \frac{x-1}{5}$

진짜 열쇠를 찾아라

추론 의사소통

오른쪽 그림과 같이 모양과 크기가 같은 다섯 개의 열쇠 A, B, C, D, E 중에서 비밀의 문을 열 수 있는 진짜 열쇠는 단 한 개이고 나머지는 가짜 열쇠이다.

가짜 열쇠 4개의 무게는 모두 2 g으로 같고, 진짜 열쇠의 무게는 x g으로 가짜 열쇠의 무게와 다르다. 윗접시저울을 이용하여 다음과 같은 순서로 진짜 열쇠를 찾아보자.

❶ A, B와 C, D의 무게 비교하기 ❷ A와 B의 무게 비교하기 ❸ C와 D의 무게 비교하기

활동 1 만약 무게가 2 g인 가짜 열쇠 4개와 무게가 x g인 진짜 열쇠 1개로 다음과 같은 두 번의 측정 결과를 얻었다면 이때의 진짜 열쇠를 찾고 x의 값의 범위를 구해 보자.

활동 2 위와 같이 가짜 열쇠 4개와 진짜 열쇠 1개가 있을 때, 윗접시저울로 많아야 3번 측정하면 진짜 열쇠를 찾을 수 있고 x의 값의 범위도 구할 수 있다. 그 이유를 설명해 보자.

중단원 마무리

Ⅲ-1 일차부등식

정답 및 풀이 279쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

61쪽

❶ 부등식과 그 해

(1) 부등호 $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ 를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 ☐이라고 한다.

(2) 미지수를 포함한 부등식이 참이 되게 하는 미지수의 값을 그 부등식의 해라 하고, 부등식의 해를 모두 구하는 것을 부등식을 푼다고 한다.

63쪽

❷ 부등식의 성질

(1) $a<b$이면 $a+c<b+c$, $a-c$ ☐ $b-c$

(2) $a<b$, $c>0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}$ ☐ $\frac{b}{c}$

(3) $a<b$, $c<0$이면 ac ☐ bc, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

67쪽

❸ 일차부등식의 풀이

(1) 부등식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

(일차식)>0, (일차식)<0, (일차식)≥ 0, (일차식)≤ 0

중 어느 하나의 꼴로 나타나는 부등식을 ☐이라고 한다.

(2) x에 대한 일차부등식은 부등식의 성질을 이용하여 주어진 부등식을

$x>$(수), $x<$(수), $x\geq$(수), $x\leq$(수)

중 어느 하나의 꼴로 바꾸어 해를 구할 수 있다.

표준 문제

01 다음 문장을 부등식으로 나타내시오.

(1) a에서 20을 빼면 7보다 작지 않다.

(2) 올해 x살인 형진이의 14년 후 나이는 올해 나이의 2배 이하이다.

(3) 전교생 430명 중 남학생이 x명일 때, 여학생은 200명보다 많다.

02 다음 ☐ 안에 알맞은 부등호를 써넣으시오.

(1) $a<b$일 때, $7a-1$ ☐ $7b-1$

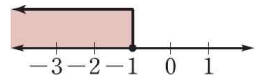
(2) $a\geq b$일 때, $-\frac{a}{5}+4$ ☐ $-\frac{b}{5}+4$

(3) $0<a<b$일 때, ab ☐ b^2

(4) $-a-9\leq -b-9$일 때, a ☐ b

03 해를 수직선 위에 나타낸 것이 오른쪽 그림과 같은 것을 **보기**에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) $7+4x \geq 3$ (ㄴ) $2x+7 \leq -5x$

(ㄷ) $12x-5 \leq 9x-2$ (ㄹ) $-2x+13 \geq 3(x+6)$

04 다음 일차부등식을 푸시오.

(1) $0.2(x+8) > 1+0.4x$ (2) $\frac{x}{4}-3 \leq \frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$

서술형

05 일차부등식 $4x+a < 2x+8$의 해가 $x < 7$일 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

서술형

06 일차부등식 $0.9x-\frac{1}{5} \geq \frac{3x-4}{2}$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결

07 유민이는 네 번의 수학 시험에서 72점, 75점, 84점, 79점을 받았다. 다섯 번째 시험까지의 평균 점수가 80점 이상이 되려면 다섯 번째 시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하시오.

08 윗변의 길이가 6 cm 이고, 높이가 8 cm 인 사다리꼴의 넓이가 52 cm^2 이상이 되려면 아랫변의 길이는 몇 cm 이상이 되어야 하는지 구하시오.

도전 문제

추론

09 오른쪽은 세 수 a, b, c에 대하여 주한, 민주, 대희가 나눈 대화이다. 세 학생의 대화를 보고 a, b, c의 대소 관계를 말하시오.

10 일차부등식 $\frac{x}{3}-\frac{x-3}{2}\geq\frac{a}{6}$를 만족시키는 양수 x가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

11 문혁이는 생일을 맞아 친구들과 놀이공원에 가려고 한다. 놀이공원에는 다음과 같은 할인 혜택이 있고 1인당 이용 요금이 15000원이다. 이때 몇 명 이상부터 생일 이벤트로 할인 받는 것보다 통신사 제휴 카드로 할인 받는 것이 더 유리한지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, 하나의 할인 혜택만 받을 수 있다.)

구분	통신사 제휴 카드 할인	생일 이벤트 할인
요금 혜택	전체 이용 요금의 20% 할인	생일자 포함 동반 4인까지 50% 할인

2 연립일차방정식

준비 학습

일차방정식의 풀이

❶ 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $3x-6=-2x+9$

(2) $-4(x+5)+1=-3$

일차방정식의 활용

❷ 연속한 두 짝수의 합이 46일 때, 이 두 짝수를 구하시오.

연립일차방정식

미지수가 2개인 연립일차방정식과 그 해의 의미를 안다.

미지수가 2개인 일차방정식

어느 도시에서 출산 장려 정책의 하나로 다자녀 가정을 위한 행사를 개최하였는데 이 행사의 참가자 중 쌍둥이와 세쌍둥이는 모두 35명이었다.

탐구 쌍둥이 x쌍, 세쌍둥이 y쌍이 참가했다고 할 때, x, y 사이의 관계를 등식으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 x, y 사이의 관계를 등식으로 나타내면

$$2x+3y=35$$

이다. 이때 이 등식은 미지수가 x, y의 2개이고, 그 차수가 모두 1인 방정식이다.

이와 같은 방정식을 미지수가 2개인 일차방정식 또는 간단히 일차방정식이라고 한다.

일반적으로 미지수가 2개인 일차방정식은

$$ax+by+c=0 \text{ (단, } a, b, c\text{는 상수, } a\neq 0, b\neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

일정한 값을 갖는 수나 문자를 상수라고 한다.

문제 1 다음에서 미지수가 2개인 일차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $x-2y=11$

(2) $x^2+9y=4$

(3) $x+5y=x-7y+2$

(4) $3x+y-1=0$

문제 2 다음 문장을 미지수가 2개인 일차방정식으로 나타내시오.

(1) 세 잎 클로버 x개와 네 잎 클로버 y개의 잎의 개수의 합은 34이다.

(2) 1 g당 4 kcal의 열량을 내는 탄수화물 x g과 1 g당 9 kcal의 열량을 내는 지방 y g을 섭취하여 1700 kcal의 열량을 얻었다.

미지수 x, y가 자연수일 때, 일차방정식 $2x+y=5$를 참이 되게 하는 x, y의 값을 구해 보자.

일차방정식 $2x+y=5$의 x에 자연수 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하여 y의 값을 구하면 다음과 같다.

$x=1$을 $2x+y=5$에 대입하면
$2\times1+y=5$
$y=5-2=3$

x	1	2	3	4	⋯
y	3	1	-1	-3	⋯

이때 y의 값도 자연수이므로 위의 표에서 방정식 $2x+y=5$를 참이 되게 하는 x, y의 값은 $x=1$, $y=3$ 또는 $x=2$, $y=1$이다. 이것을 각각 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $(1, 3)$, $(2, 1)$이다.

이와 같이 미지수가 2개인 일차방정식이 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 순서쌍 (x, y)를 그 일차방정식의 해라 하고, 일차방정식의 해를 모두 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

문제 3 다음에서 $x=3$, $y=1$을 해로 갖는 일차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $x+2y=5$　　(2) $3x-y=7$

(3) $4x+3y=10$　　(4) $x-y-2=0$

문제 4 x, y가 자연수일 때, 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $x+y=4$　　(2) $x+3y=11$

표현하기

다음과 같이 미지수가 2개인 일차방정식으로 나타낼 수 있는 상황을 우리 주변에서 찾아보고, 이를 일차방정식으로 나타내 보자.

예 TV 프로그램이 시작되기 전 4분 동안 15초짜리 광고 x개와 20초짜리 광고 y개가 방송되었다.

➔ $15x+20y=240$

미지수가 2개인 연립방정식

어느 동아리 회원 7명은 공원에서 1인용 자전거 x대와 2인용 자전거 y대를 합하여 5대를 빌려 빈자리 없이 모두 나누어 탔다고 한다.

탐구 ① 동아리 회원들이 빌린 자전거가 5대인 것을 x, y에 대한 일차방정식으로 나타내 보자.

탐구 ② 자전거를 탄 사람이 모두 7명인 것을 x, y에 대한 일차방정식으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 얻은 두 일차방정식은

$$x+y=5, \quad x+2y=7$$

이다. 이 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값을 구하려고 할 때, 이들을 한 쌍으로 묶어서 보통 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ x+2y=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

이와 같이 두 개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 **연립방정식**이라고 한다.

미지수가 2개인 두 일차방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 미지수가 2개인 연립일차방정식이라고 한다.

위의 연립방정식에서 두 방정식 ①, ②를 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값을 구해 보자.

자전거의 수 x, y는 0 또는 자연수이므로 두 일차방정식의 해를 각각 구하면 다음과 같다.

① $x+y=5$의 해

x	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0

② $x+2y=7$의 해

x	1	3	5	7
y	3	2	1	0

위의 표에서 두 일차방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값은 $x=3$, $y=2$이고, 이것을 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $(3, 2)$이다.

이와 같이 연립방정식에서 두 방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 순서쌍 (x, y)를 그 연립방정식의 해라 하고, 연립방정식의 해를 구하는 것을 연립방정식을 푼다고 한다.

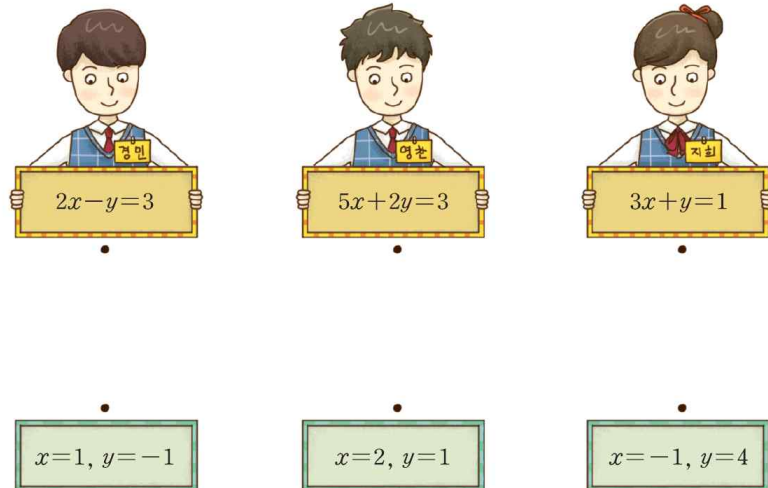
문제 5 x, y가 자연수일 때, 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

적용하기

경민, 영찬, 지희는 각자 하나씩 일차방정식 카드를 가지고 있다.

① 세 학생이 가지고 있는 일차방정식과 그 해를 선을 그어 연결해 보자.

$x=1$, $y=-1$	$x=2$, $y=1$	$x=-1$, $y=4$

② ①을 이용하여 다음과 같은 해를 갖는 연립방정식을 만들어 보자.

(1) $x=1$, $y=-1$　　(2) $x=-1$, $y=4$

확인하기

1 x, y가 자연수일 때, 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $5x+y=22$　　(2) $3x+4y=16$

2 다음에서 $x=3$, $y=-2$를 해로 갖는 연립방정식을 모두 찾으시오.

(1) $\begin{cases} x+4y=-5 \\ -x+y=-1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-y=8 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 4x-3y=18 \\ -2x+5y=-16 \end{cases}$

예상과 추측을 통한 연립방정식의 풀이

스프레드시트를 이용하여 연립방정식을 풀 수 있다. 연립방정식 $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=x-1 \end{cases}$ 을 다음과 같은 순서로 풀어 보자.

❶ 연립방정식 $\begin{cases} y=-x+3 & \cdots\cdots ① \\ y=x-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$에서 ①의 y를 $y1$이라 하고 ②의 y를 $y2$라고 하자. 스프레드시트 창을 열고 [그림 1]과 같이 첫 번째 가로줄에 차례대로 x, $y1$, $y2$를 입력한다.

❷ A2칸에 0을, B2칸에 '=－A2+3'을, C2칸에 '=A2－1'을 입력하면 [그림 2]와 같이 $x=0$일 때의 $y1$, $y2$의 값이 B2, C2칸에 나타난다.

❸ [그림 3]과 같이 B2, C2칸을 동시에 선택한 후 아래로 끈다.

❹ ❷에서 $x=0$일 때, $y1>y2$이고, A3칸에 4를 입력한 후 Enter ↵ 를 누르면 $y1=-1$, $y2=3$으로 $y1<y2$이다. [그림 4]와 같이 0과 4 사이의 범위에서 x의 값을 바꿔가며 $y1=y2$가 되는 x의 값을 찾으면 연립방정식의 해 $x=2$, $y=1$을 구할 수 있다.

[그림 1]

[그림 2]

[그림 3]

x	y1	y2
0	3	-1
4	-1	3
1	2	0
2	1	1

[그림 4]

활동 1 다음 연립방정식을 스프레드시트를 이용하여 풀고 그 방법을 설명해 보자.

(1) $\begin{cases} x=-y+5 \\ x=y-7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ -x+y=-5 \end{cases}$

연립방정식의 풀이

미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

덧셈 또는 뺄셈을 이용한 연립방정식의 풀이

매점에서 다희는 생수 3병과 주스 2병을 사고 2800원을 지불하였고, 동준이는 생수 1병과 주스 2병을 사고 2000원을 지불하였다.

탐구 ① 생수 1병의 값을 x원, 주스 1병의 값을 y원이라고 할 때, 다희와 동준이가 지불한 금액이 2800원, 2000원인 것을 각각 x, y에 대한 일차방정식으로 나타내 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 두 일차방정식을 변끼리 뺀 식의 미지수의 개수를 말해 보자.

위의 생각톡에서 다음 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} 3x+2y=2800 & \cdots\cdots ① \\ x+2y=2000 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

이때 ①, ②의 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 각각 빼면

$$(3x+2y)-(x+2y)=2800-2000$$

$$2x=800 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\begin{array}{rr} & 3x+2y=2800 \\ -) & x+2y=2000 \\ \hline & 2x \quad\quad = 800 \end{array}$$

이다. 즉 미지수 y가 없어지고 미지수가 1개인 일차방정식이 된다.

③에서 x의 값을 구하면

$$x=400$$

이고, $x=400$을 ②에 대입하여 y의 값을 구하면

$x=400$을 ①에 대입해도 $y=800$을 얻는다.

$$400+2y=2000, \quad y=800$$

이다. 따라서 위의 연립방정식의 해는 $x=400$, $y=800$이므로 생수 1병의 값은 400원, 주스 1병의 값은 800원이다.

이와 같이 연립방정식의 두 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

참고 위와 같은 연립방정식의 풀이 방법을 가감법이라고 한다.

예제 1 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x+y=7 & \cdots\cdots ① \\ 3x-y=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

확인 $x=2$, $y=3$을 ①, ②에 각각 대입하면

$\begin{cases} 2\times2+3=7 \\ 3\times2-3=3 \end{cases}$

이므로 $x=2$, $y=3$은 주어진 연립방정식의 해이다.

풀이 y를 없애기 위하여 ①, ②를 변끼리 더하면

$5x=10$, $x=2$

$x=2$를 ①에 대입하면

$2\times2+y=7$, $y=3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=3$이다.

$$\begin{array}{rl} & 2x+y=7 \\ +) & 3x-y=3 \\ \hline & 5x \quad =10 \end{array}$$

답 $x=2$, $y=3$

문제 1 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-2y=7 \\ 5x+2y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 9x-4y=6 \\ 9x-y=15 \end{cases}$

연립방정식을 풀 때, 두 방정식을 변끼리 더하거나 빼도 한 미지수가 없어지지 않는 경우가 있다. 이때 두 방정식의 양변에 적당한 수를 곱한 후 변끼리 더하거나 빼서 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

예제 2 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x+3y=4 & \cdots\cdots ① \\ 3x+4y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

y를 없애기 위하여 ①의 양변에 4를 곱하고 ②의 양변에 3을 곱한 후 두 방정식을 변끼리 빼도 된다.

풀이 x를 없애기 위하여 ①의 양변에 3을 곱하고 ②의 양변에 2를 곱하면

$\begin{cases} 6x+9y=12 & \cdots\cdots ③ \\ 6x+8y=10 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③에서 ④를 변끼리 빼면 $y=2$

$y=2$를 ①에 대입하면

$2x+3\times2=4$, $2x=-2$, $x=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-1$, $y=2$이다.

$$\begin{array}{rl} & 6x+9y=12 \\ -) & 6x+8y=10 \\ \hline & \quad\quad y=2 \end{array}$$

답 $x=-1$, $y=2$

문제 2 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+5y=11 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=1 \\ 5x-4=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+5y=4 \\ 6x+y=-10 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ -5x+8y=-2 \end{cases}$

대입을 이용한 연립방정식의 풀이

어느 한 시점에 1유로는 1달러보다 원화로 210원 더 비싸고, 1달러와 1유로의 합은 원화로 2476원이었다.

탐구 ① 1달러를 x원, 1유로를 y원이라고 할 때, 1유로가 1달러보다 210원 더 비싼 것과 1달러와 1유로의 합이 2476원인 것을 각각 x, y에 대한 일차방정식으로 나타내 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 두 일차방정식을 대입을 이용하여 한 문자에 대한 일차방정식으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 다음 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} y=x+210 & \cdots\cdots ① \\ x+y=2476 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

이때 ①을 ②에 대입하면

$$x+(x+210)=2476$$

$$2x+210=2476 \quad \cdots\cdots ③$$

이다. 즉 미지수 y가 없어지고 미지수가 1개인 일차방정식이 된다.

$y=x+210$ ↓ 대입 $x+y=2476$ ↓ $x+(x+210)=2476$

③을 정리하여 풀면 $x=1133$이고, $x=1133$을 ①에 대입하여 y의 값을 구하면

$$y=1133+210, \quad y=1343$$

이다. 따라서 위의 연립방정식의 해는 $x=1133$, $y=1343$이므로 1달러는 1133원, 1유로는 1343원이다.

$x=1133$을 ②에 대입해도 $y=1343$을 얻는다.

이와 같이 연립방정식의 두 일차방정식 중 어느 한 방정식이 $y=(x$의 식) 또는 $x=(y$의 식)의 꼴일 때에는 이를 다른 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

참고 위와 같은 연립방정식의 풀이 방법을 대입법이라고 한다.

예제 3 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x = 3y - 1 & \cdots\cdots ① \\ 4x - y = 7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

확인 $x=2$, $y=1$을 ①, ②에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 2 = 3\times1-1 \\ 4\times2-1=7 \end{cases}$$

이므로 $x=2$, $y=1$은 주어진 연립방정식의 해이다.

풀이 x를 없애기 위하여 ①을 ②에 대입하면

$$4(3y-1)-y=7, \quad 11y=11, \quad y=1$$

$y=1$을 ①에 대입하면

$$x=3\times1-1, \quad x=2$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=2$, $y=1$이다.

답 $x=2$, $y=1$

문제 3 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ y=-x+5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=3y-7 \\ 4x+y=-2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=2x-7 \\ y=4x-3 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x=5y+4 \\ 2x-9y=12 \end{cases}$

대입을 이용하여 연립방정식을 풀기 위해서는 한 방정식에서 한 미지수를 다른 미지수의 식으로 나타내어야 하는 경우가 있다.

예제 4 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} y-3x=1 & \cdots\cdots ① \\ 7x-2y=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 y를 없애기 위하여 ①에서 y를 x의 식으로 나타내면

$$y=3x+1 \quad \cdots\cdots ③$$

③을 ②에 대입하면

$$7x-2(3x+1)=-1, \quad x=1$$

$x=1$을 ③에 대입하면

$$y=3\times1+1, \quad y=4$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=1$, $y=4$이다.

답 $x=1$, $y=4$

문제 4 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x-3y=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-5y=9 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$

토론하기

다음 각 연립방정식을 두 사람의 방법 중 누구의 방법으로 푸는 것이 편리한지 짝과 서로 이야기해 보자.

여러 가지 연립방정식의 풀이

연립방정식에서 계수가 소수 또는 분수인 경우에는 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

예제 5 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 0.4x-0.3y=3 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{3}{2}y=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①의 양변에 10을 곱하고 ②의 양변에 6을 곱하면

$$\begin{cases} 4x-3y=30 & \cdots\cdots ③ \\ 4x-9y=42 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③에서 ④를 변끼리 빼면

$6y=-12, \quad y=-2$

$y=-2$를 ③에 대입하면

$4x-3\times(-2)=30, \quad 4x=24, \quad x=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=6$, $y=-2$이다. **답** $x=6$, $y=-2$

문제 5 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 1.2x-0.5y=0.4 \\ x-\dfrac{1}{4}y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{5}y=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{2}{3}y=3 \end{cases}$

연립방정식의 해가 하나인 경우도 있지만 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우도 있다.

예제 6 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x-y=3 & \cdots\cdots ① \\ 4x-2y=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y=1 & \cdots\cdots ① \\ 3x+9y=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

풀이 (1) ①의 양변에 2를 곱하면

$$4x-2y=6 \quad \cdots\cdots ③$$

③은 ②와 같으므로 ①과 ②의 해는 같다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 무수히 많다.

이때 연립방정식의 해는 $2x-y=3$을 만족시키는 모든 x, y의 값이다.

(2) ①의 양변에 3을 곱하면

$$3x+9y=3 \quad \cdots\cdots ③$$

②에서 ③을 변끼리 빼면

$$0\times x+0\times y=3 \quad \cdots\cdots ④$$

이때 ④를 만족시키는 x, y의 값은 없으므로 주어진 연립방정식의 해는 없다.

답 (1) 해는 무수히 많다. (2) 해는 없다.

문제 6 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y=3 \\ -x+y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-7y=10 \\ 10x-35y=50 \end{cases}$

적용하기

$A=B=C$ 꼴의 방정식은 다음의 세 연립방정식 중 하나의 꼴로 바꾸어 풀 수 있다.

$\begin{cases} A=B \\ A=C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$

① 방정식 $3x+2y=5x+6y=-4$를 위의 세 연립방정식 중 두 개의 꼴로 나타내 보자.

② ①에서 얻은 두 연립방정식의 해를 각각 구하고, 그 결과를 비교해 보자.

미지수가 2개인 연립방정식의 활용

여러 가지 수량과 관련된 문제 중에는 연립방정식을 활용하여 해결할 수 있는 경우가 많다.

준환이네 동아리 회원 31명은 4명씩 또는 5명씩 7대의 바나나 보트에 나누어 탔다. 4명씩 탄 보트와 5명씩 탄 보트는 각각 몇 대인지 구하시오.

위의 문제를 다음과 같은 순서로 해결해 보자.

미지수 정하기 4명씩 탄 보트를 x대, 5명씩 탄 보트를 y대라고 하자.

방정식 세우기 동아리 회원은 모두 31명이므로 $4x+5y=31$

보트가 모두 7대이므로 $x+y=7$

연립방정식을 세우면 $\begin{cases} 4x+5y=31 & \cdots\cdots ① \\ x+y=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

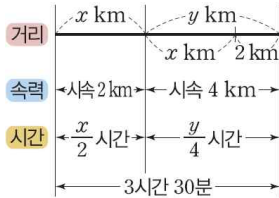
방정식 풀기 이 연립방정식을 풀면 $x=4,\ y=3$

따라서 4명씩 탄 보트는 4대, 5명씩 탄 보트는 3대이다.

확인하기 4명씩 탄 보트가 4대, 5명씩 탄 보트가 3대이면 바나나 보트는 모두 $4+3=7$(대)이고, 동아리 회원은 모두 $4\times4+5\times3=31$(명)이므로 문제의 뜻에 맞는다.

문제 7 올해 민서와 아버지의 나이의 합은 54살이고 5년 후에는 아버지의 나이가 민서의 나이의 3배가 된다. 올해 민서와 아버지의 나이를 각각 구하시오.

문제 8 어떤 두 자리 자연수에서 각 자리의 숫자의 합은 13이고, 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음의 수보다 45만큼 커진다고 한다. 이때 처음의 수를 구하시오.

예제 7 진주는 주말에 등산을 갔는데 올라갈 때에는 시속 2 km로 걷고, 내려올 때에는 올라갈 때보다 2 km 더 먼 길을 시속 4 km로 걸었더니 총 3시간 30분이 걸렸다. 올라간 거리와 내려온 거리를 각각 구하시오.

풀이 ❶ 올라간 거리를 x km, 내려온 거리를 y km라고 하자.

❷ 내려온 거리가 올라간 거리보다 2 km만큼 더 멀므로 $y=x+2$

올라갈 때 걸린 시간은 $\frac{x}{2}$시간, 내려올 때 걸린 시간은 $\frac{y}{4}$시간이고, 전체 걸린 시간은 3시간 30분, 즉 $3+\frac{30}{60}=\frac{7}{2}$(시간)이므로

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=\frac{7}{2}$$

연립방정식을 세우면 $\begin{cases} y=x+2 & \cdots\cdots ① \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=\frac{7}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

❸ 연립방정식을 풀면 $x=4$, $y=6$

따라서 올라간 거리는 4 km, 내려온 거리는 6 km이다.

❹ 내려온 거리는 올라간 거리보다 $6-4=2$(km) 더 멀고, 올라갈 때 걸린 시간은 $\frac{4}{2}=2$(시간), 내려올 때 걸린 시간은 $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$(시간)이므로 총 3시간 30분이 걸렸다. 따라서 문제의 뜻에 맞는다.

답 올라간 거리: 4 km, 내려온 거리: 6 km

문제 9 진희는 자원봉사 단체에서 개최한 걷기 대회에 참가하였다. 출발점에서 6 km 떨어진 도착점까지 가는데 처음에는 분속 100 m로 걷다가 다리가 아파서 분속 80 m로 걸었더니 총 1시간 10분이 걸렸다. 분속 100 m로 걸은 거리와 분속 80 m로 걸은 거리는 각각 몇 km인지 구하시오.

확인하기

1 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x-y=7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{6}{5}x+y=0.7 \\ 0.4x+y=0.3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-(x-2y)=10 \end{cases}$

연립방정식을 풀어 사다리 완성하기

사다리 타기 게임은 각 출발점에서 세로선을 타고 내려가다 가로선을 만나면 그 가로선을 따라 바로 옆의 세로선으로 이동하여 다시 내려가는 게임이다. 이때 출발점과 도착점은 하나씩 짝지어진다.

다음은 출발점에는 연립방정식이, 도착점에는 각각의 해가 적힌 사다리 타기 문제이다.

활동 1 각 연립방정식과 그 해가 서로 연결되도록 가로선을 그어 사다리를 완성해 보자.

활동 2 새로운 연립방정식과 그 해를 이용하여 위와 같은 사다리 타기 문제를 만들어 보고, 짝과 바꾸어 풀어 보자.

정답 및 풀이 281쪽

중단원 마무리

Ⅲ-2 연립일차방정식

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 미지수가 2개인 일차방정식 78쪽

(1) $ax+by+c=0$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq 0$, $b\neq 0$)과 같이 미지수가 2개이고, 그 차수가 모두 1인 방정식을 미지수가 2개인 ( ) 이라고 한다.

(2) 미지수가 2개인 일차방정식이 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 순서쌍 $(x,\ y)$를 그 일차방정식의 해라고 한다.

❷ 미지수가 2개인 연립방정식 80쪽

(1) 두 개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 ( ) 이라 하고, 각각의 방정식이 미지수가 2개인 일차방정식인 연립방정식을 미지수가 2개인 연립일차방정식이라고 한다.

(2) 연립방정식에서 두 방정식을 동시에 참이 되게 하는 x, y의 값 또는 순서쌍 $(x,\ y)$를 그 연립방정식의 해라고 한다.

❸ 연립방정식의 풀이 83쪽

(1) 연립방정식의 두 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

(2) 연립방정식의 두 일차방정식 중 어느 한 방정식이 $y=(x$의 식) 또는 $x=(y$의 식)의 꼴일 때에는 이를 다른 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

표준 문제

01 다음에서 $x=-1$, $y=3$을 해로 갖는 일차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $-x+y=2$　　(2) $4x+y=1$

(3) $3x+2y=3$　　(4) $-2x+3y=11$

02 x, y의 순서쌍 $(a,\ -1)$과 $(3,\ b)$가 일차방정식 $x-2y=7$의 해일 때, a, b의 값을 구하시오.

03 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ 2x+by=10 \end{cases}$ 의 해가 $x=3$, $y=2$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

04 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-3y=9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=3y-6 \\ x=2y-5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4(x-y)=3x-7 \\ 2x-5(x+y)=4 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 0.3x+0.4y=1.7 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y=3 \end{cases}$

서술형

05 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y=a \\ x+2y=7-a \end{cases}$ 를 만족시키는 x의 값이 y의 값의 2배일 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

06 연립방정식 $\begin{cases} 4x+ay=3 \\ -2x+3y=4 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

서술형

07 다음은 중국의 수학책인 『산법통종』에 실린 문제이다. 물음에 답하시오.

> 구미호는 머리가 하나에 꼬리가 아홉 개 달려 있다. 붕조는 머리가 아홉 개에 꼬리가 한 개 있다. 이 두 동물을 우리 안에 넣었더니 머리가 72개에 꼬리가 88개였다고 한다. 구미호와 붕조는 각각 몇 마리 있는가?

(1) 구미호를 x마리, 붕조를 y마리라고 할 때, x, y에 대한 연립방정식으로 나타내시오.

(2) 구미호와 붕조는 각각 몇 마리인지 구하시오.

08 강민이와 지수가 계단에서 가위바위보를 하여 이긴 사람은 3계단을 올라가고, 진 사람은 2계단을 내려가기로 하였다. 가위바위보를 몇 회 하였더니 강민이는 처음보다 8계단 올라가고 지수는 3계단 올라가 있었다고 한다. 강민이가 이긴 횟수를 구하시오.

(단, 비긴 경우는 없었다고 한다.)

도전 문제

추론 **09** 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-5 \\ bx+ay=7 \end{cases}$ 에서 두 상수 a와 b를 바꾸어 풀었더니 그 해가 $x=3$, $y=-1$이 되었다. 처음의 연립방정식의 해를 구하시오.

서술형 **10** 두 연립방정식 $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ ax+2y=6 \end{cases}$ 과 $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 2x+2y=b \end{cases}$ 의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결 **11** 어느 무용 오디션에 전공자들과 비전공자들이 합하여 30명이 참가하였다. 50점 만점인 이 오디션에서 전체 평균은 35점, 전공자들의 평균은 40점, 비전공자들의 평균은 25점이었다. 이 오디션에 참가한 비전공자는 모두 몇 명인지 구하시오.

대단원 마무리

정답 및 풀이 282쪽

01 다음에서 일차부등식을 모두 고르면? (정답 2개)

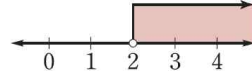
① $x^2+2>2$
② $-x+6\leq x+5$
③ $5x+11>5x+8$
④ $x^2-6x<-6x+7$
⑤ $x^2+4\geq x(x-1)$

02 다음에서 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $a<b$일 때, $1-5a<1-5b$이다.
② $-a<-b$일 때, $2a+7>2b+7$이다.
③ $\frac{a}{3}-4<\frac{b}{3}-4$일 때, $a>b$이다.
④ $-\frac{a}{2}-5\leq-\frac{b}{2}-5$일 때, $a\geq b$이다.
⑤ $1-a<1-b$일 때, $3-2a>3-2b$이다.

03 다음에서 일차부등식 $-2x+5>3-4x$와 해가 같은 것은?

① $x+1>-2$　　② $8-x>7$
③ $6x-5<4x+3$　　④ $0.4x>0.1x+1.5$
⑤ $\frac{x}{6}-\frac{1}{3}<\frac{x}{2}$

04 일차부등식 $-5(x+2)+7x>a$의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

05 한 번에 500 kg까지 운반할 수 있는 승강기가 있다. 교내 국악기 연주 대회 준비로 몸무게가 70 kg인 사람이 이 승강기를 타고 한 대의 무게가 30 kg인 거문고를 운반하려고 한다. 한 번에 최대 몇 대의 거문고를 운반할 수 있는지 구하시오.

06 원가가 10000원인 물건을 정가의 20 %를 할인하여 판매해서 원가의 10 % 이상의 이익을 얻으려고 할 때, 정가는 얼마 이상으로 정해야 하는지 구하시오.

07 x, y가 자연수일 때, 일차방정식 $2x+5y=17$의 해의 개수를 구하시오.

08 연립방정식 $\begin{cases} x-5y=12 \\ 3x+10y=11 \end{cases}$의 해가 일차방정식 $ax+(a+5)y=7$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

09 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{y-x}{5}+0.3x=-\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{x+2y}{10}-\dfrac{6}{5}y=2.2 \end{cases}$를 푸시오.

10 다음에서 그 해가 무수히 많은 연립방정식을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=1-y \\ 3x+3y=5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x+3y=4 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 0.3x+0.6y=0.9 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+y=2 \\ x=4-2y \end{cases}$

11 어떤 물통에 물을 가득 채우는데 A 호스로 10분 동안 넣고 B 호스로 15분 동안 넣었더니 물통이 가득 찼다. 또 같은 물통에 A, B 두 호스를 모두 사용하여 12분 동안 넣었더니 물통이 가득 찼을 때, A 호스만을 사용하여 이 물통을 가득 채우는 데 걸리는 시간을 구하시오.

12 준호네 학교의 작년 2학년 학생 수는 330이었다. 올해는 작년에 비하여 남학생 수는 20% 증가하고, 여학생 수는 10% 감소하여 전체적으로 12명이 증가하였다. 올해의 여학생 수를 구하시오.

서술형

13 다음 두 일차부등식의 해가 같을 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

$$2(x+a)+5x>9+4x,$$
$$\frac{x+7}{4}-\frac{5x-2}{3}<2-x$$

풀이

14 어느 주차장의 주차 요금은 30분까지는 2000원이고, 30분이 지나면 1분마다 200원씩 요금이 추가된다. 주차 요금이 8000원 이하가 되게 하려면 최대 몇 분까지 주차할 수 있는지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=12 \\ bx-ay=11 \end{cases}$ 의 해가 $x=2$, $y=-1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 둘레의 길이가 2.4 km인 호수 공원을 동석이와 도은이가 같은 지점에서 동시에 출발하여 각각 일정한 속력으로 호수의 둘레를 따라 서로 반대 방향으로 걸으면 15분 후에 처음으로 다시 만나고, 같은 방향으로 걸으면 40분 후에 처음으로 다시 만난다고 한다. 동석이가 도은이보다 빠르다고 할 때, 동석이와 도은이의 속력은 각각 시속 몇 km인지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

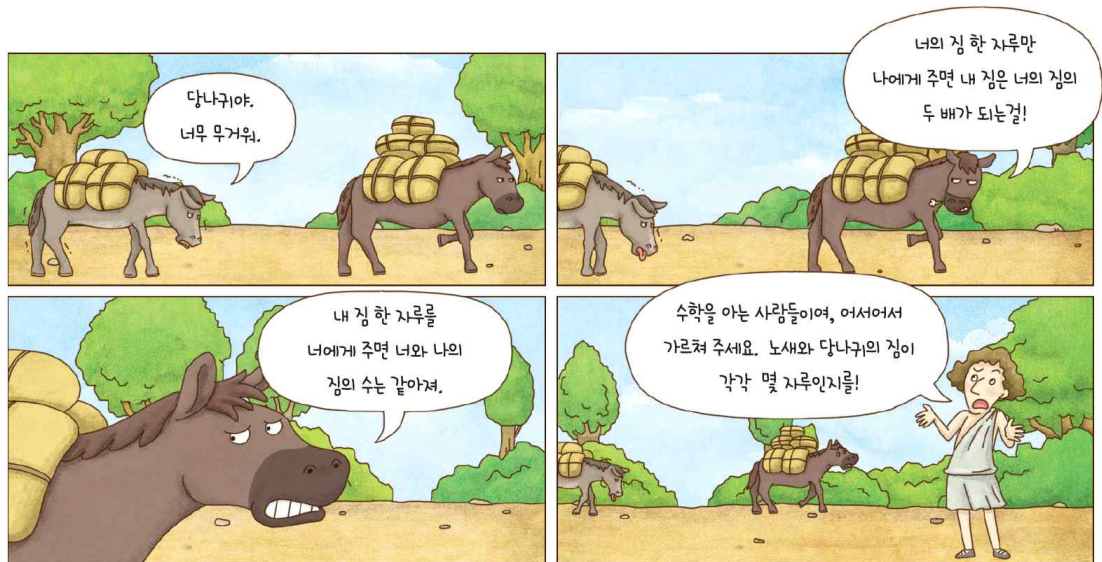
❶ 부등식과 그 해의 의미를 알고, 부등식의 성질을 이해한다.

❷ 일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

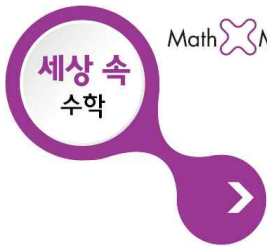
❸ 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

만화로 익히는 부등식과 방정식

다음은 『그리스 시화집』에 실린 시 중 고대 그리스의 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~ B.C. 265?)가 지은 시의 내용을 만화로 구성한 것이다.

과제 1 위의 만화 내용을 연립방정식으로 나타내고, 노새와 당나귀의 짐은 각각 몇 자루인지 구해 보자.

과제 2 역사 속 일화나 실생활에서 부등식 또는 연립방정식 문제를 찾아본 후 이를 만화로 표현하고 풀어보자.

Math Medicine, Economics

의학과 경제학의 기본, 연립방정식

컴퓨터 단층 촬영(Computed Tomography), 즉 CT는 신체 내부를 입체적으로 볼 수 있는 촬영 방법으로, 의학 분야에서 매우 중요하게 쓰이는 기술 중 하나이다. 이 기술은 미국의 물리학자 코맥(Cormack, A. M., 1924~1998)과 영국의 전기 공학자 하운스필드(Hounsfield, G. N., 1919~2004)가 개발하였고 그 공로로 그들은 1979년 노벨 생리·의학상을 공동 수상하였다.

CT는 일정량의 X선을 몸에 여러 각도로 투과하여 처음 쏜 X선의 양과 투과한 후의 X선의 양의 차이를 측정한 후 어느 부위에서 얼마만큼 X선이 흡수되었는지를 종합하여 입체적인 영상으로 재구성하는데, 흡수된 X선의 양을 구할 때 이용되는 것이 바로 연립방정식이다.

또 연립방정식은 게임 이론 상황에서 최적의 전략을 찾을 때에도 이용된다. 게임 이론(Game Theory)은 게임의 결과가 게임에 참여한 모든 사람들의 선택에 따라 달라지는 상황을 분석하는 데 이용되는 수학 이론이다. 예를 들어 축구의 승부차기에서 공격수는 골키퍼가 공을 막을 방향을 예측하여 공을 차는 방향을 결정하고, 반대로 골키퍼는 공격수가 공을 찰 방향을 예측하여 방어하는 상황이 게임 이론의 상황이다.

게임 이론은 경제학에서 주로 경쟁 기업의 행동과 경제 현상의 분석에 적용되어 여러 가지 시장을 분석하고 문제를 해결 하는 데 이용된다.

이외에도 연립방정식은 도로의 통행량 분석, 지문 감식, 암호 기술 등 여러 분야에서 폭넓게 사용되고 있다.

(출처: 『중앙일보』, 2004. 2. 25.,
Myerson, Roger B., 『Game Theory Analysis of Conflict』)

진로 탐색

경제학자 | 사회에서 일어나는 경제 현상을 분석·연구하고 수학·통계 등의 방법을 사용하여 경제적인 현상이 일어나는 이유를 설명한다.

Ⅳ 함수
배운 내용
이 단원의 내용
배울 내용
초 5~6
• 규칙과 대응
중 수학 1
• 그래프
• 정비례와 반비례
중 수학 2
• 미지수가 2개인 일차방정식
• 연립일차방정식
1 일차함수와 그래프
• 함수
• 일차함수와 그 그래프
• 일차함수의 그래프의 성질
2 일차함수와 일차방정식의 관계
• 일차함수와 일차방정식
• 일차함수의 그래프와 연립일차방정식
중 수학 3
• 이차함수와 그래프
고 수학
• 함수
• 유리함수와 무리함수

지면에서 높이 올라갈수록 기온은 낮아지고, 물속으로 깊이 들어갈수록 수압은 높아진다. 이처럼 **높이와 기온, 깊이와 수압 사이에는 특별한 수학적 관계**가 있다.
이 단원에서는 두 양 사이의 관계를 일차함수와 그 그래프로 나타내고, 일차함수와 일차방정식의 관계를 알아본다.

어제 기름 10 L를 넣고 34 km를 달렸어.

연비가 17 km/L이니까 남은 기름이 얼마지?

1 일차함수와 그래프

준비 학습

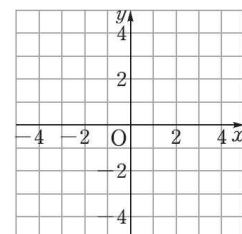
정비례 관계

❶ y가 x에 정비례할 때, y를 x의 식으로 나타내고 다음 표를 완성하시오.

x	-3	1	2	
y		-3		-9

그래프

❷ 다음 정비례 관계와 반비례 관계의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\dfrac{1}{2}x$　　　(2) $y=-\dfrac{2}{x}$

함수

함수의 개념을 이해한다.

함수

다음은 우리 주변에서 일어나는 다양한 상황이다.

(ㄱ) 한 바퀴 도는 데 15분이 걸리는 대관람차가 x바퀴 도는 데 걸리는 시간 y분
(ㄴ) 우유 1000 mL를 x명이 똑같이 나누어 마실 때, 한 명이 마시는 우유의 양 y mL
(ㄷ) 하루 중에서 낮의 길이가 x시간일 때 밤의 길이 y시간

탐구 각각의 상황에서 x의 값이 변함에 따라 y의 값은 몇 개씩 정해지는지 말해 보자.

디리클레(Dirichlet, J. P. G. L., 1805~1859)는 오늘날 쓰이는 함수 개념을 정립하였다.

변수는 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자이다.

$y=f(x)$에서 f는 함수를 뜻하는 function의 첫 글자이다.

한 병에 800원인 생수를 x병 살 때 지불해야 하는 금액을 y원이라 하고, x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	800	1600	2400	3200	4000	$\cdots$

위의 표에서 x의 값이 1, 2, 3, $\cdots$으로 변함에 따라 y의 값은 800, 1600, 2400, $\cdots$으로 하나씩 정해지고, y를 x의 식으로 나타내면 $y=800x$이다.

이와 같이 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계가 있을 때, y를 x에 대한 **함수**라 하고 이것을 기호로

$$y=f(x)$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 위의 식 $y=800x$에서 y는 x에 대한 함수이고, 이때 함수 $y=800x$를 $f(x)=800x$로 나타낼 수 있다.

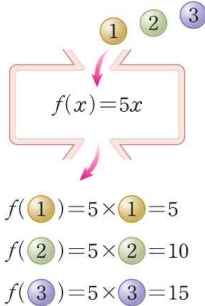
$y=800x$ $y=f(x)$
$f(x)=800x$

참고 정비례 관계 $y=ax$ (단, $a\neq0$)와 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$(단, $a\neq0$)는 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지므로 y는 x에 대한 함수이다.

문제 1 다음에서 y가 x에 대한 함수인지 말하시오.

(1) 초속 x m로 움직이는 무빙워크에 서서 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간 y초

(2) 우리 반에서 x월에 태어난 학생 수 y명

(3) 자연수 x의 배수 y

함수 $y=f(x)$에서 x의 값에 따라 하나씩 정해지는 y의 값 $f(x)$를 x에 대한 **함숫값**이라고 한다.

예를 들어 $f(x)=5x$에서 x의 값이 1, 2, 3일 때의 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 다음과 같다.

$x=1$일 때, $f(1)=5\times1=5$

$x=2$일 때, $f(2)=5\times2=10$

$x=3$일 때, $f(3)=5\times3=15$

문제 2 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 다음과 같을 때, $f(-2)$를 구하시오.

(1) $f(x)=3x$ (2) $f(x)=-\dfrac{12}{x}$ (3) $f(x)=2x+1$

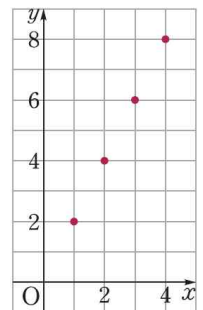
문제 3 종이컵 1개를 생산하는 데 발생하는 이산화 탄소의 양은 11 g이라고 한다. 종이컵 x개를 생산하는 데 발생하는 이산화 탄소의 양을 y g이라고 하면 y는 x에 대한 함수이다. 다음에 답하시오.

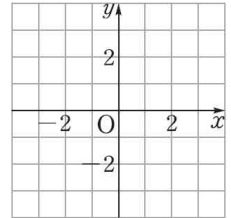
(1) $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오.

(2) $f(50)$을 구하시오.

함수 $y=2x$에서 x의 값이 1, 2, 3, 4일 때, x의 값과 그 값에 따라 정해지는 y의 값을 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$

이고, 이 순서쌍을 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이와 같이 함수 $y=f(x)$에서 x의 값과 그 값에 따라 정해지는 y의 값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점 전체를 좌표평면 위에 나타낸 것을 그 함수의 그래프라고 한다.

문제 4 함수 $y=-x$에서 x의 값이 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$일 때, 이 함수의 그래프를 그리시오.

이야기 수학

자격루와 함수

국보 제229호인 자격루는 1434년에 장영실(蔣英實, ?~?)이 제작한 물시계이다. 자격루는 물을 내보내는 그릇과 받는 그릇, 잣대, 구리 구슬 등으로 구성되어 있는데 작동 원리는 다음과 같다.

물을 내보내는 그릇에서 일정한 속력으로 일정한 양의 물을 흘려보내면 받는 그릇의 물이 점점 차올라 잣대가 위로 올라가게 되고, 이것은 일정한 간격으로 설치된 선반을 건드려 구리 구슬을 떨어뜨림으로써 규칙적으로 시각을 알리도록 되어 있다.

이처럼 받는 그릇의 물의 양에 따라 물의 높이는 하나씩 정해지므로 그릇의 물의 높이는 물의 양에 대한 함수라고 할 수 있다.

(출처: 문화재청, 2017)

확인하기

1 다음에서 y가 x에 대한 함수인 것을 모두 고르시오.

(1) 한 자루에 600원인 연필 x자루의 가격 y원

(2) 자연수 x와 4의 공약수 y

(3) 길이가 x cm인 테이프를 5 cm 사용하고 남은 길이 y cm

2 한 변의 길이가 x cm인 정삼각형의 둘레의 길이를 y cm라고 하면 y는 x에 대한 함수이다. 다음에 답하시오.

(1) $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오.

(2) $f(7)$을 구하시오.

일차함수와 그 그래프

일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.

일차함수

영우는 친구 3명과 함께 1인당 10000원에 삼겹살을 무제한으로 제공하는 식당에 갔다. 이 식당에서 1병에 1000원인 음료수를 x병 마셨을 때, 지불해야 하는 총금액을 y원이라고 하자.

탐구 ① 다음 표를 완성해 보자.

x	1	2	3	4	5
y	41000				

탐구 ② y를 x의 식으로 나타내 보자.

위의 생각톡에서 y를 x의 식으로 나타내면

$$y = 1000x + 40000$$

과 같이 y는 x의 일차식으로 나타난다. 이때 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지므로 y는 x에 대한 함수이다.

일반적으로 함수 $y = f(x)$에서

$$y = ax + b \ (\text{단, } a, b\text{는 상수, } a \neq 0)$$

와 같이 y가 x의 일차식으로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 **일차함수**라고 한다.

보기 ❶ 함수 $y = 5x - 1$, $y = \frac{3}{4}x$는 x에 대한 일차함수이다.

❷ 함수 $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2 + 1$은 x에 대한 일차함수가 아니다.

문제 1 다음에서 y가 x에 대한 일차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $y = \frac{5}{x}$

(2) $y = -10x$

(3) $y = 3x - 8$

(4) $y = -x^2 + 4$

문제 2 다음에서 y를 x의 식으로 나타내고, y가 x에 대한 일차함수인지 말하시오.

(1) 시속 5 km로 x시간 동안 걸어간 거리 y km

(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이 y cm^2

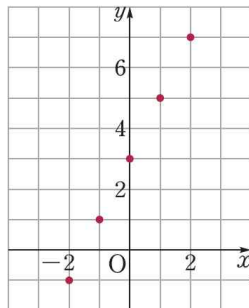
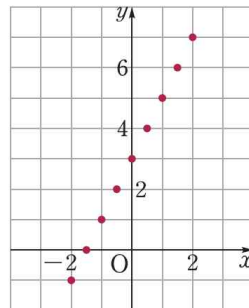
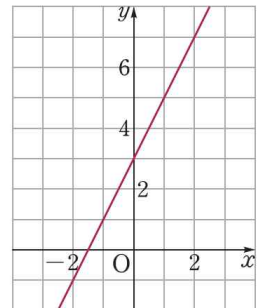
(3) 올해 15살인 윤지의 x년 후의 나이 y살

일차함수의 그래프

일차함수의 그래프를 그려 보자.

일차함수 $y=2x+3$에서 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, x의 값과 그 값에 따라 정해지는 y의 값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

또 x의 값의 간격을 점점 작게 하면 [그림 2]와 같이 점들이 촘촘하게 되고, x의 값의 범위가 모든 수일 때에는 [그림 3]과 같이 직선이 된다.

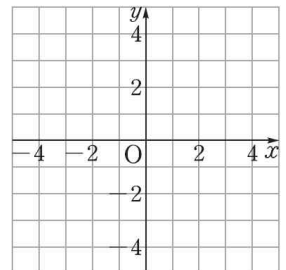
이 직선이 x의 값의 범위가 모든 수일 때 일차함수 $y=2x+3$의 그래프이다.

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값이 구체적으로 주어지지 않으면 x의 값의 범위는 모든 수로 생각한다.

일반적으로 x의 값의 범위가 모든 수일 때, 일차함수 $y=ax+b$ (단, $a\neq 0$)의 그래프는 직선이다.

문제 3 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=x-1$

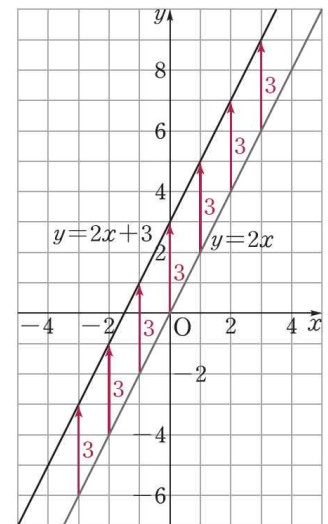
(2) $y=-2x+1$

두 일차함수 $y=2x$와 $y=2x+3$의 그래프 사이의 관계를 알아보자.

다음 표는 두 일차함수 $y=2x$와 $y=2x+3$에 대하여 x의 각 값에 따라 정해지는 y의 값을 나타낸 것이다.

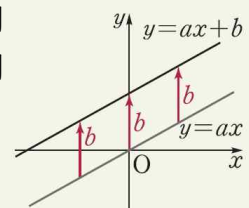
x	⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	⋯
$2x$	⋯	-6	-4	-2	0	2	4	6	⋯
$2x+3$	⋯	-3	-1	1	3	5	7	9	⋯

위의 표에서 x의 각 값에 대하여 일차함수 $y=2x+3$의 함숫값은 일차함수 $y=2x$의 함숫값보다 항상 3만큼 크다는 것을 알 수 있다.

따라서 일차함수 $y=2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행하게 이동한 것과 같다.

이와 같이 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 **평행이동**이라고 한다.

일반적으로 두 일차함수 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프

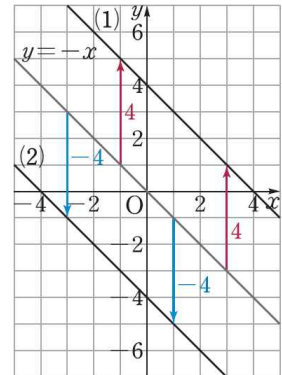
일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.

문제 4 다음 일차함수의 그래프는 일차함수 $y=3x$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

(1) $y=3x+1$ (2) $y=3x+5$ (3) $y=3x-2$

예제 1 일차함수 $y=-x$의 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-x+4$ (2) $y=-x-4$

풀이 (1) 일차함수 $y=-x+4$의 그래프는 일차함수 $y=-x$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

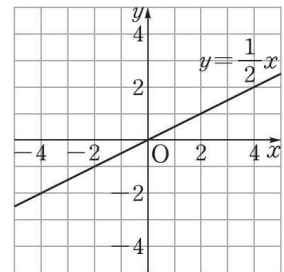
(2) 일차함수 $y=-x-4$의 그래프는 일차함수 $y=-x$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

문제 5 오른쪽 그림은 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$

(2) $y=\frac{1}{2}x-1$

적용하기

다음은 일차함수 $y=4x+2$의 그래프를 이용하여 일차함수 $y=4x-1$의 그래프를 그리는 방법에 대한 주원이와 세아의 대화이다. 주원이의 설명을 완성해 보자.

주원: 두 일차함수 $y=4x+2$와 $y=4x-1$의 그래프가 어떤 직선이더라?

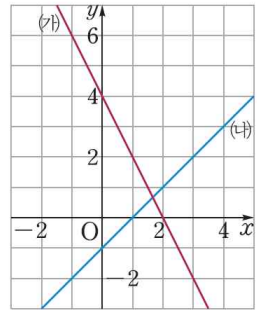
세아: 일차함수 $y=4x+2$의 그래프는 일차함수 $y=4x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선이고, 일차함수 $y=4x-1$의 그래프는 일차함수 $y=4x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선이지.

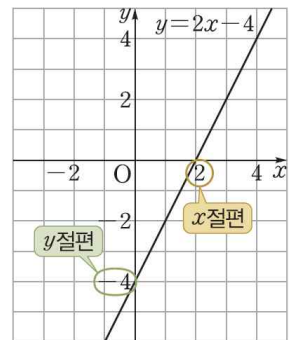
주원: 아하! 그럼 일차함수 $y=4x-1$의 그래프는 일차함수 $y=4x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 ______________

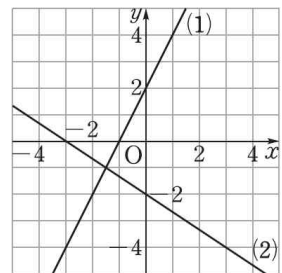
일차함수의 그래프와 절편

오른쪽 그림에서 (가)와 (나)는 모두 일차함수의 그래프이다.

탐구 ① 두 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 각각 구하고, 두 점의 좌표의 공통점을 말해 보자.

탐구 ② 두 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 각각 구하고, 두 점의 좌표의 공통점을 말해 보자.

오른쪽 그림에서 일차함수 $y=2x-4$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 이 점의 x좌표는 2이다. 또 이 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ -4)$이고, 이 점의 y좌표는 -4이다.

이와 같이 함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 이 그래프의 **x절편**, y축과 만나는 점의 y좌표를 이 그래프의 **y절편**이라고 한다.

예를 들어 위의 일차함수 $y=2x-4$의 그래프의 x절편은 2이고 y절편은 -4이다.

문제 6 오른쪽 일차함수의 그래프 (1), (2)의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

일차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 y좌표가 0임을 이용하면 x절편을 구할 수 있다. 마찬가지로 일차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 x좌표가 0임을 이용하면 y절편을 구할 수 있다.

예제 2 일차함수 $y=-3x+5$의 그래프의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

$y=ax+b$ ← y절편

풀이 $y=-3x+5$에서 $y=0$일 때 x의 값을 구하면

$$0=-3x+5, \quad x=\frac{5}{3}$$

$y=-3x+5$에서 $x=0$일 때 y의 값을 구하면

$$y=-3\times0+5, \quad y=5$$

따라서 x절편은 $\frac{5}{3}$이고 y절편은 5이다.

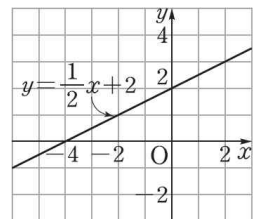
답 x절편: $\frac{5}{3}$, y절편: 5

문제 7 다음 일차함수의 그래프의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

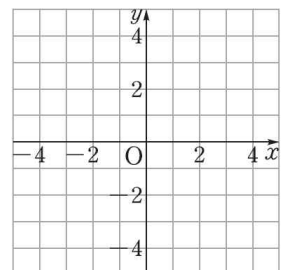
(1) $y=-2x+6$
(2) $y=4x-3$
(3) $y=\frac{1}{3}x+1$
(4) $y=-\frac{2}{5}x-4$

일차함수의 그래프는 직선이므로 그래프 위의 두 점을 알면 그 그래프를 그릴 수 있다. 따라서 일차함수의 그래프가 원점을 지나지 않을 때, x절편과 y절편을 알면 x축, y축과 만나는 두 점을 알 수 있으므로 그 그래프를 그릴 수 있다.

예제 3 x절편과 y절편을 이용하여 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+2$의 그래프를 그리시오.

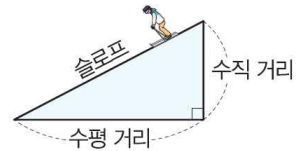
풀이 $y=\frac{1}{2}x+2$에서 $y=0$일 때, $x=-4$이므로 x절편은 -4이다.
또 $x=0$일 때 $y=2$이므로 y절편은 2이다.
따라서 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선이다.

답 풀이 참조

문제 8 x절편과 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=x-2$
(2) $y=-\frac{1}{3}x+1$

일차함수의 그래프와 기울기

생각 톡

다음 표는 어느 스키장의 초급자 코스, 중급자 코스 슬로프의 수평 거리와 수직 거리를 조사하여 나타낸 것이다. 이때 슬로프의 기울어진 정도는 $\frac{(\text{수직 거리})}{(\text{수평 거리})}$로 구할 수 있다.

	수평 거리 (m)	수직 거리 (m)
초급자 코스	500	100
중급자 코스	1000	300

탐구 초급자 코스, 중급자 코스 슬로프의 기울어진 정도를 각각 구해 보자.

일차함수의 그래프의 기울어진 정도를 알아보자.

일차함수 $y=2x-1$에서 x의 값이 변함에 따라 정해지는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

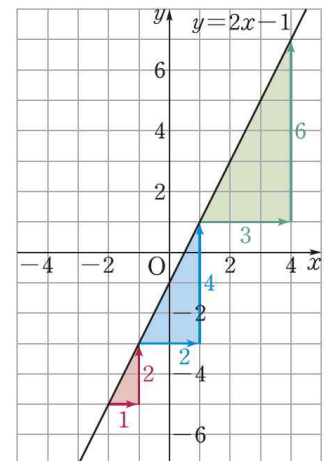
x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	-3	-1	1	3	5	7	$\cdots$

(x의 증가량: 1, 2, 3 / y의 증가량: 2, 4, 6)

위의 표에서 x의 값이 1만큼 증가하면 y의 값은 2만큼 증가하고, x의 값이 2만큼 증가하면 y의 값은 4만큼 증가한다. 또 x의 값이 3만큼 증가하면 y의 값은 6만큼 증가한다. 따라서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은

$$\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$$
$$=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

로 항상 일정하고, 이 값은 일차함수 $y=2x-1$에서 x의 계수 2와 같다.

이때 ①은 일차함수 $y=2x-1$의 그래프에서 직선의 기울어진 정도를 나타낸다.

일반적으로 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며, 그 비율은 x의 계수 a와 같다.

이 증가량의 비율 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 **기울기**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$y = ax + b$ (← 기울기: a)

> **일차함수의 그래프의 기울기**
>
> 일차함수 $y = ax + b$의 그래프에서
>
> $$(\text{기울기}) = \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = a$$

문제 9 다음 일차함수의 그래프의 기울기를 구하시오.

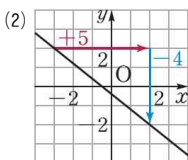
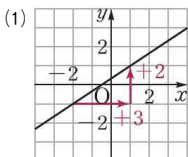
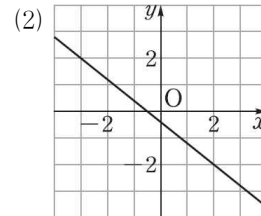
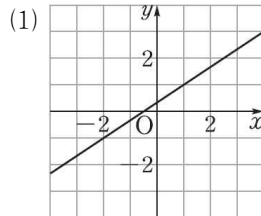
(1) $y = 3x - 2$　　(2) $y = -2x + 6$

(3) $y = \frac{1}{4}x + 3$　　(4) $y = -\frac{5}{3}x - 1$

일차함수의 그래프 위의 두 점을 알면 그 일차함수의 그래프의 기울기를 구할 수 있다.

예제 4 다음 일차함수의 그래프의 기울기를 구하시오.

(1)

(2)

풀이 (1) 그래프가 두 점 $(-2,\ -1)$, $(1,\ 1)$을 지나므로

$$(\text{기울기}) = \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = \frac{1-(-1)}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$$

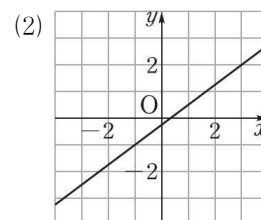
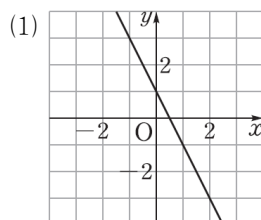
(2) 그래프가 두 점 $(-3,\ 2)$, $(2,\ -2)$를 지나므로

$$(\text{기울기}) = \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = \frac{-2-2}{2-(-3)} = -\frac{4}{5}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$　(2) $-\frac{4}{5}$

문제 10 다음 일차함수의 그래프의 기울기를 구하시오.

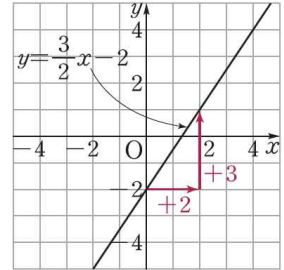
(1)

(2)

일차함수의 그래프의 기울기와 y절편을 알면 그 그래프를 그릴 수 있다.

예제 5 기울기와 y절편을 이용하여 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-2$의 그래프를 그리시오.

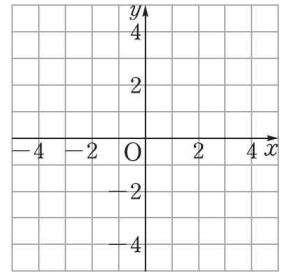
풀이 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-2$의 그래프는 y절편이 -2이므로 점 $(0,\ -2)$를 지난다.

또 이 그래프는 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로 점 $(0,\ -2)$에서 x의 값이 2만큼, y의 값이 3만큼 증가한 점 $(2,\ 1)$을 지난다.

따라서 일차함수 $y=\frac{3}{2}x-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ -2)$, $(2,\ 1)$을 지나는 직선이다.

답 풀이 참조

문제 11 기울기와 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=2x-3$

(2) $y=-\frac{5}{4}x+1$

확인하기

1 다음 일차함수의 그래프의 x절편, y절편과 기울기를 각각 구하시오.

(1) $y=6x-3$　　(2) $y=-\frac{3}{2}x-6$

2 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-x+2$　　(2) $y=\frac{3}{4}x-1$

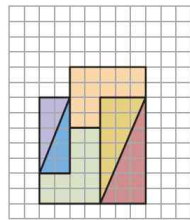
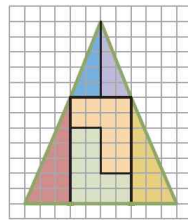
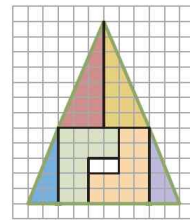
사고력+ 네 일차함수 $y=x+4$, $y=x-4$, $y=-x+4$, $y=-x-4$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

직선의 기울기로 밝힌 퍼즐의 비밀

문제 해결 | 추론

퍼즐 중에는 착시 현상을 이용한 재미있는 것이 많다. 이러한 퍼즐에 숨어 있는 비밀은 수학적으로 탐구하여 설명할 수 있다.

다음은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 그린 [그림 1]의 여섯 개의 조각을 위치를 바꾸어 [그림 2], [그림 3]과 같이 만든 것이다. 그런데 [그림 2]와 [그림 3]의 도형의 넓이가 각각 다르게 보인다. 여기에 숨어 있는 비밀을 찾아보자.

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

(출처: http://mathworld.wolfram.com, 2017)

활동 1

(1) [그림 2]와 [그림 3]의 바깥의 테두리를 이루는 도형이 이등변삼각형이라고 할 때, [그림 2], [그림 3]의 넓이와 [그림 1]의 여섯 개의 조각의 넓이의 합을 비교해 보자.

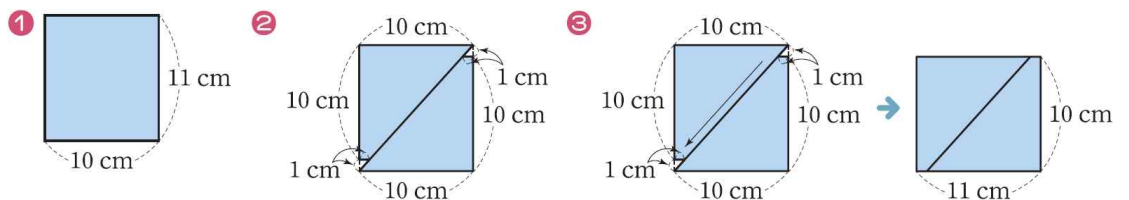
(2) [그림 1]에서 빨간 직각삼각형과 파란 직각삼각형의 빗변의 기울기를 각각 구하고, 이를 이용하여 (1)의 결과를 설명해 보자.

활동 2

직선의 기울기를 이용하여 다음 퍼즐에 숨어 있는 비밀을 추론하여 설명해 보자.

❶ 가로의 길이가 10 cm, 세로의 길이가 11 cm인 직사각형 모양의 종이를 준비한다.

❷ 종이를 대각선으로 자른 후 두 모서리 부분에서 밑변의 길이와 높이가 각각 1 cm인 직각삼각형을 잘라 낸다.

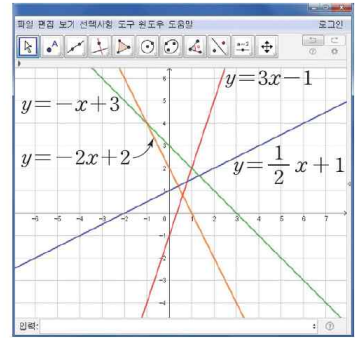
❸ 위쪽의 종이를 아래쪽으로 내려 가로의 길이가 11 cm, 세로의 길이가 10 cm인 직사각형을 만들면 이 직사각형의 넓이는 ❶의 종이와 넓이가 같다.

일차함수의 그래프의 성질

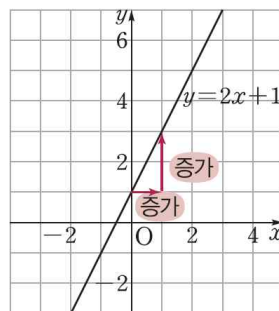
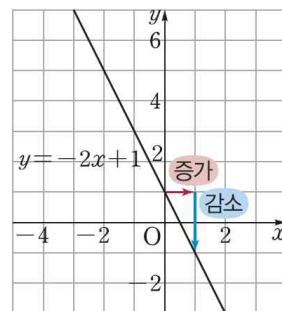
일차함수의 그래프의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

일차함수의 그래프의 성질

오른쪽은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 일차함수의 그래프를 그린 것이다.

탐구 ① 오른쪽 위로 향하는 그래프를 모두 찾아보고, 그 그래프의 기울기의 공통점을 말해 보자.

탐구 ② 오른쪽 아래로 향하는 그래프를 모두 찾아보고, 그 그래프의 기울기의 공통점을 말해 보자.

일차함수 $y=2x+1$의 그래프의 기울기는 2이므로 x의 값이 1만큼 증가하면 y의 값은 2만큼 증가한다. 따라서 [그림 1]과 같이 일차함수 $y=2x+1$의 그래프는 오른쪽 위로 향하는 직선이다.

또 일차함수 $y=-2x+1$의 그래프의 기울기는 -2이므로 x의 값이 1만큼 증가하면 y의 값은 2만큼 감소한다. 따라서 [그림 2]와 같이 일차함수 $y=-2x+1$의 그래프는 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

[그림 1]

[그림 2]

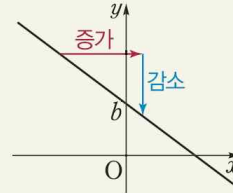
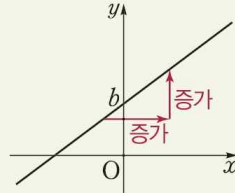
일반적으로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 기울기 a가 양수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 오른쪽 위로 향하는 직선이고, 기울기 a가 음수이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프

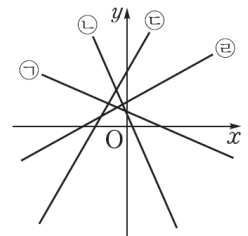
일차함수 $y=ax+b$의 그래프는

❶ $a>0$이면 오른쪽 위로 향하는 직선이다.

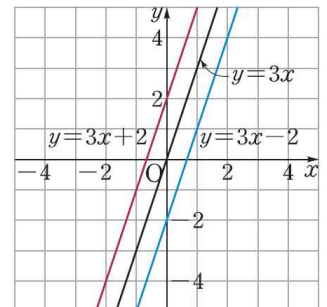
❷ $a<0$이면 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

문제 1 다음 일차함수의 그래프 중에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 것을 모두 찾으시오.

(1) $y=4x+1$　　(2) $y=-\frac{1}{2}x-5$

(3) $y=-x+7$　　(4) $y=\frac{2}{3}x-4$

문제 2 오른쪽 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 $a>0$인 것을 모두 찾으시오.

기울기가 같은 두 일차함수의 그래프 사이의 관계를 알아보자.

세 일차함수 $y=3x+2$, $y=3x$, $y=3x-2$의 그래프의 기울기는 모두 3으로 같고, 이 세 그래프를 한 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 일차함수 $y=3x+2$, $y=3x-2$의 그래프는 일차함수 $y=3x$의 그래프를 y축의 방향으로 각각 2, -2만큼 평행이동한 것이므로 서로 평행하다.

일반적으로 두 일차함수의 그래프와 기울기 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

두 일차함수의 그래프에서 기울기와 y절편이 모두 같으면 일치하고, 기울기가 같고 y절편이 다르면 평행하다.

일차함수의 그래프의 기울기와 평행

❶ 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.

❷ 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

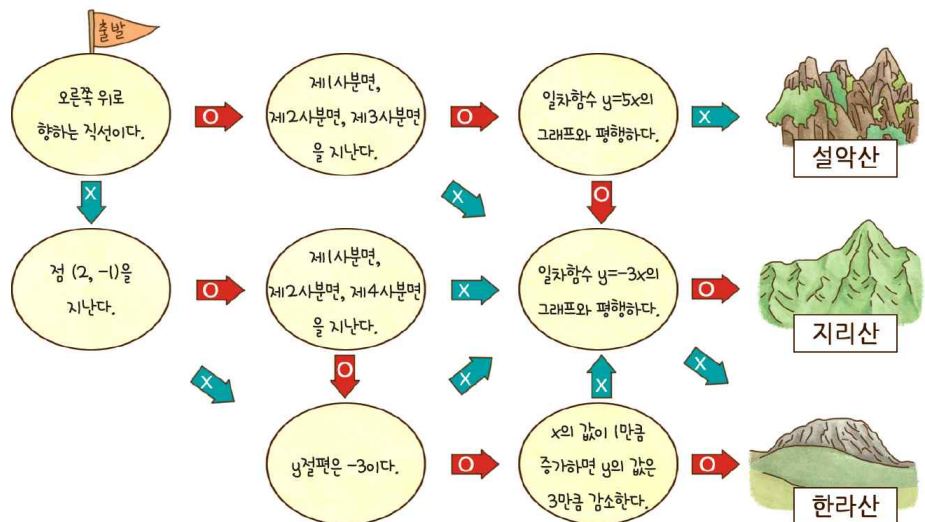
창의·융합

문제 3 다음 일차함수 중 그래프가 서로 평행한 것을 찾아 선으로 연결하고, 순우리말의 뜻을 확인해 보시오.

미리내	$y=\frac{1}{5}x+1$ •	• $y=-7x+1$	한평생
한뉘	$y=-7x$ •	• $y=\frac{1}{5}x-6$	은하수
마파람	$y=3x-2$ •	• $y=0.4x+3$	해 질 녘 보이는 금성
개밥바라기	$y=0.4x-1$ •	• $y=3x-\frac{1}{4}$	남풍

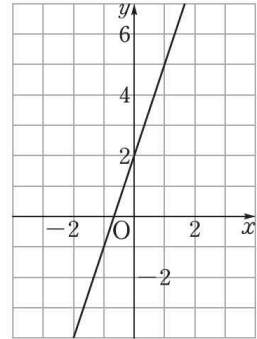
적용하기

민호는 다음 규칙에 따라 이동했을 때 도착하게 되는 곳을 여행지로 정하려고 한다. 민호의 여행지를 알아보자.

일차함수 $y=-3x+5$의 그래프에 대한 설명으로 옳으면 ○를 따라 이동하고, 옳지 않으면 ×를 따라 이동한다.

일차함수의 식 구하기

오른쪽 그림은 어떤 일차함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 것이다.

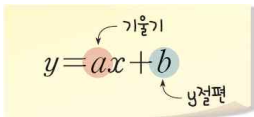
탐구 ① 이 그래프의 기울기를 구해 보자.

탐구 ② 이 그래프의 y절편을 구해 보자.

위의 생각톡의 그래프는 x의 값이 1만큼 증가할 때 y의 값이 3만큼 증가하므로 기울기는 3이다.

또 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ 2)$이므로 y절편은 2이다.

따라서 이 그래프가 나타내는 일차함수의 식은

$$y=3x+2$$

이다.

이와 같이 직선의 기울기와 y절편을 알면 그 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구할 수 있다.

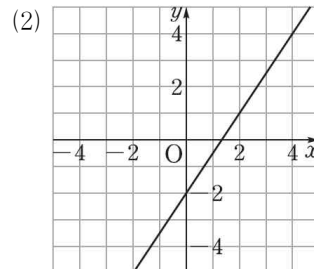
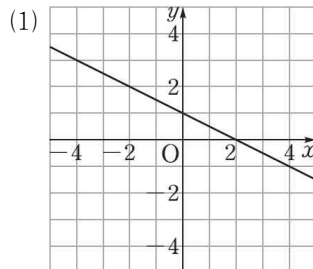
문제 4 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) 기울기가 2이고 y절편이 -1인 직선

(2) 기울기가 -5이고 y절편이 3인 직선

문제 5 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1)

(2)

직선의 기울기와 그 직선이 지나는 한 점의 좌표를 알면 그 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구할 수 있다.

예제 1 기울기가 2이고 점 $(-1,\ 3)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

풀이 구하는 일차함수의 식을 $y=ax+b$라고 하면 기울기가 2이므로

$$y=2x+b \qquad \cdots\cdots①$$

로 나타낼 수 있다.

이 그래프가 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 ①에 $x=-1$, $y=3$을 대입하면

$$3=2\times(-1)+b, \qquad b=5$$

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=2x+5$이다. 답 $y=2x+5$

문제 6 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(2,\ 4)$를 지나는 직선

(2) 일차함수 $y=-3x+4$의 그래프와 평행하고 점 $(1,\ -5)$를 지나는 직선

일차함수의 그래프 위의 서로 다른 두 점의 좌표를 알면 그 일차함수의 식을 구할 수 있다.

예제 2 두 점 $(1,\ -2)$, $(3,\ 4)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

풀이 두 점 $(1,\ -2)$, $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$$(\text{기울기})=\frac{4-(-2)}{3-1}=\frac{6}{2}=3$$

이므로 구하는 일차함수의 식을

$$y=3x+b \qquad \cdots\cdots①$$

로 나타낼 수 있다.

이 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 ①에 $x=1$, $y=-2$를 대입하면

$$-2=3\times1+b, \qquad b=-5$$

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=3x-5$이다. 답 $y=3x-5$

주어진 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로 ①에 $x=3$, $y=4$를 대입하여 일차함수의 식을 구할 수도 있다.

문제 7 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

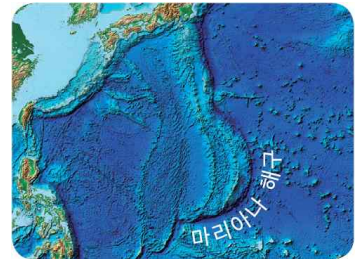
(1) 두 점 $(-3,\ 6)$, $(3,\ 2)$를 지나는 직선

(2) x절편이 1, y절편이 2인 직선

일차함수의 활용

일차함수를 활용하면 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. 주어진 문제에서 수량 사이의 관계를 파악하여 일차함수의 식이나 그래프로 나타내고, 이를 이용하여 문제를 해결한다.

예제 3

바다 밑에 형성된 V자 모양의 깊은 골짜기를 해구라고 하는데, 마리아나 해구는 지구에서 가장 깊은 해구로 최대 수심은 약 11000 m로 알려져 있다. 바다의 수면에서의 압력은 1기압이고, 수심이 10 m 깊어질 때마다 압력은 1기압씩 높아진다고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 수심이 x m인 지점의 압력을 y기압이라고 할 때, y를 x의 식으로 나타내시오.
(2) 수심이 11000 m인 지점의 압력은 얼마인지 구하시오.

풀이 (1) 수심이 10 m 깊어질 때마다 압력은 1기압씩 높아지므로 수심이 x m 깊어질 때 압력은 $0.1x$기압 높아진다.
그런데 바다의 수면에서의 압력은 1기압이므로 y를 x의 식으로 나타내면

$$y=0.1x+1$$

이다.

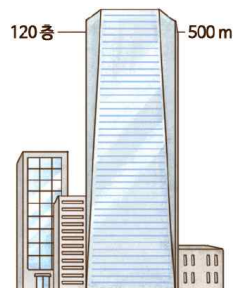
(2) $x=11000$을 $y=0.1x+1$에 대입하면

$$y=0.1\times11000+1=1101$$

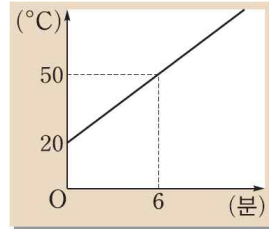
따라서 수심이 11000 m인 지점의 압력은 1101기압이다.

답 (1) $y=0.1x+1$ (2) 1101기압

문제 8

어떤 건물의 엘리베이터가 120층에 멈추어 있을 때, 지면으로부터 이 엘리베이터 바닥까지의 높이는 500 m이다. 이 엘리베이터가 120층에서 출발하여 1초에 8 m씩 움직여서 지면으로 내려온다고 한다. 다음에 답하시오.
(단, 엘리베이터는 중간에 멈추지 않는다.)

(1) x초 후의 지면으로부터 엘리베이터 바닥까지의 높이를 y m라고 할 때, y를 x의 식으로 나타내시오.
(2) 엘리베이터 바닥이 지면으로부터 100 m 높이에 도착하는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하시오.

창의·융합

문제 9 실험실에서 비커에 담긴 물을 가열하면서 물의 온도를 측정하였더니 아래 그래프와 같이 시간이 지남에 따라 물의 온도가 일정하게 올라갔다고 한다. 다음에 답하시오.

(1) x분 후의 물의 온도를 y℃라고 할 때, y를 x의 식으로 나타내시오.

(2) 가열한 지 10분 후의 물의 온도를 구하시오.

(3) 가열한 지 몇 분 후에 물이 끓기 시작하는지 구하시오.

(단, 물은 100℃에서 끓는다.)

확인하기

1 다음 일차함수의 그래프를 오른쪽 위로 향하는 직선과 오른쪽 아래로 향하는 직선으로 구분하시오.

(1) $y=x-5$

(2) $y=-5x-1$

(3) $y=-\frac{9}{4}x+2$

(4) $y=\frac{5}{7}x+\frac{2}{3}$

2 다음 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

(1) 일차함수 $y=-5x$의 그래프와 평행하고 점 $(3,\ -8)$을 지나는 직선

(2) 두 점 $(2,\ 3)$, $(6,\ 11)$을 지나는 직선

사고력+ 오른쪽 그림은 일차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그린 것인데 일부분이 얼룩져 보이지 않는다. 다음 일차함수의 그래프로 알맞은 것을 ㉠~㉣ 중에서 찾아 짝지으시오.

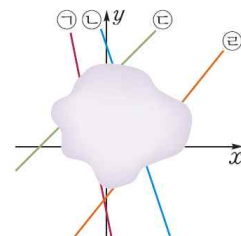
(1) $y=x+2$

(2) $y=-2x+3$

(3) $y=-5x-2$

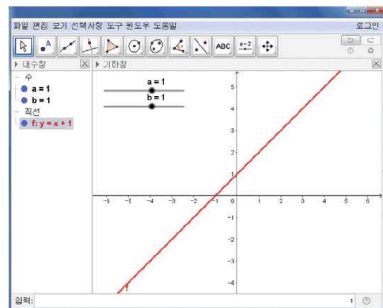
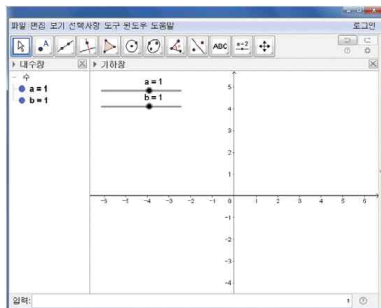
(4) $y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$

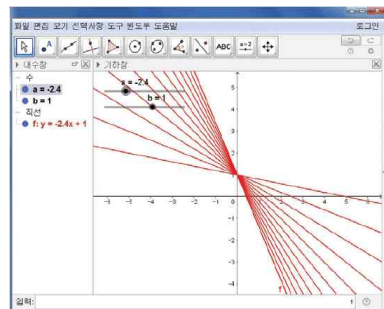
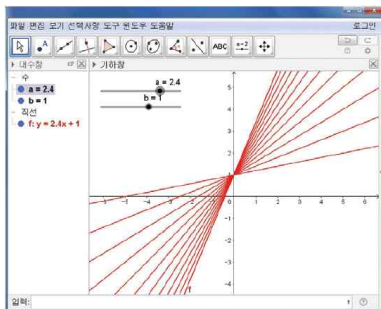
컴퓨터로 일차함수의 그래프 탐구하기

정보 처리 | 추론

컴퓨터 프로그램을 이용하면 그래프를 정확하고 빠르게 그릴 수 있고, 그래프의 특징을 탐구하는 데에도 도움이 된다.

다음은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 일차함수 $y=ax+b$ (단, $a\neq 0$)의 그래프를 그리고 a의 값에 따른 그래프의 모양의 변화를 나타낸 것이다.

❶ 입력창에 'a'를 입력한 후 Enter↵를 누른 후 슬라이더 만들기를 선택하여 a의 슬라이더를 만든다. 같은 방법으로 b의 슬라이더를 만든다.

❷ 입력 창에 'y=ax+b'를 입력하고 Enter↵를 누르면 처음에는 일차함수 $y=x+1$의 그래프가 그려진다.

❸ $a>0$인 범위에서 슬라이더의 점을 움직일 때, a의 값에 따른 그래프의 모양의 변화는 다음과 같다.

❹ $a<0$인 범위에서 슬라이더의 점을 움직일 때, a의 값에 따른 그래프의 모양의 변화는 다음과 같다.

알지오매스(http://algeomath.kr)에서도 일차함수의 그래프의 성질을 탐색할 수 있다.

활동 1 일차함수 $y=ax+1$ (단, $a\neq 0$)의 그래프의 특징과 a의 값에 따라 그 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 말해 보자.

활동 2 위와 같은 방법으로 일차함수 $y=x+b$의 그래프의 특징과 b의 값에 따라 그 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 말해 보자.

정답 및 풀이 285쪽

중단원 마무리

Ⅳ-1 일차함수와 그래프

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 함수 103쪽

(1) 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계가 있을 때, y를 x에 대한 ☐라고 한다.

(2) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값에 따라 하나씩 정해지는 y의 값을 $f(x)$를 x에 대한 ☐이라고 한다.

2 일차함수와 그 그래프 106쪽

(1) 함수 $y=f(x)$에서 $y=ax+b$ (단, a, b는 상수, $a \neq 0$)와 같이 y가 x의 일차식으로 나타날 때, 이 함수를 x에 대한 ☐라고 한다.

(2) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 ☐만큼 평행이동한 직선이다.

(3) 일차함수의 그래프의 절편

① ☐: 함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표

② ☐: 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표

(4) 일차함수의 그래프의 기울기

일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

$$(\text{기울기})=\frac{(\square)}{(\square)}=a$$

3 일차함수의 그래프의 성질 116쪽

(1) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는

① $a>0$이면 오른쪽 ☐로 향하는 직선이다.

② $a<0$이면 오른쪽 ☐로 향하는 직선이다.

(2) ☐가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.
또 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 ☐는 같다.

표준 문제

01 다음에서 y가 x에 대한 함수가 <u>아닌</u> 것은?

① 둘레의 길이가 x cm인 정사각형의 한 변의 길이 y cm
② 절댓값이 x인 수 y
③ 자연수 x의 약수의 개수 y
④ 한 개에 50 g인 물건 x개의 무게 y g
⑤ 길이가 180 cm인 실을 x개의 조각으로 똑같이 나눌 때 한 조각의 길이 y cm

02 함수 $f(x)=2x-1$에서 $f(2)=a$, $f(b)=-5$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

03 일차함수 $y=4x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동하였더니 일차함수 $y=ax+7$의 그래프가 되었다. 이때 $a+m$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

04 일차함수 $y=-2x+a$의 그래프의 y절편이 -3일 때, x절편을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

서술형

05 일차함수 $y=ax+9$의 그래프에서 x의 값이 -1에서 7까지 증가할 때, y의 값은 4만큼 감소하였다. 다음을 구하시오.

(1) 상수 a의 값

(2) x의 값이 6만큼 증가할 때, y의 값의 증가량

추론

06 일차함수 $y=-\frac{4}{3}x+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 **보기**에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) 점 $(3,\ -3)$을 지난다.

(ㄴ) 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

(ㄷ) 제1사분면을 지나지 않는다.

(ㄹ) 일차함수 $y=-\frac{4}{3}x-2$의 그래프와 평행하다.

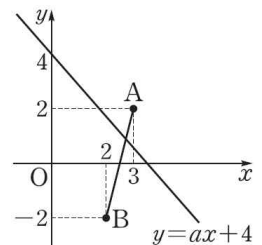
07 $ab < 0$, $a-b > 0$일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하시오.

08 두 점 $(-2,\ 5)$, $(1,\ -4)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수가 있다. 이 일차함수의 그래프와 평행하고 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

도전 문제

추론

09 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ -2)$에 대하여 일차함수 $y=ax+4$의 그래프가 선분 AB와 만나도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

서술형

10 물이 들어 있는 원기둥 모양의 물통에서 일정한 속력으로 물을 빼내고 있다. 물을 빼내기 시작한 지 30초 후에 물통에 들어 있는 물의 높이는 62 cm이었고, 50초 후에 물통에 들어 있는 물의 높이는 58 cm이었다. 다음에 답하시오.

(1) 이 물통에서 물을 빼내기 시작한 지 x초 후에 물통에 들어 있는 물의 높이를 y cm라고 할 때, y를 x의 식으로 나타내시오.

(2) 물을 빼내기 시작한 지 1분 40초 후에 물통에 들어 있는 물의 높이를 구하시오.

2 일차함수와 일차방정식의 관계

준비 학습

미지수가 2개인 일차방정식

❶ 다음에서 x, y의 순서쌍 $(1,\ -2)$를 해로 갖는 일차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $x+y=-1$　　(2) $2x-y+4=0$

(3) $2x+y=0$　　(4) $x-y+3=0$

연립일차방정식

❷ 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+3y=10 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+6y=27 \\ y=12-x \end{cases}$

일차함수와 일차방정식

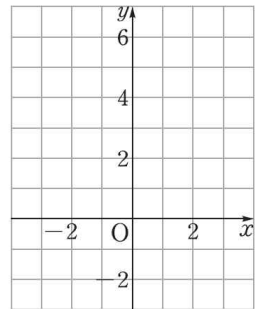
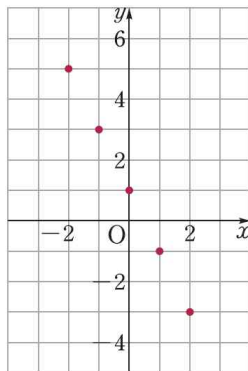
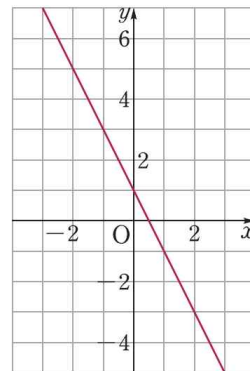
일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 이해한다.

일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식

미지수가 2개인 일차방정식 $x-y+2=0$의 해를 좌표평면 위에 나타내려고 한다.

탐구 ① x, y의 값이 정수일 때, 방정식 $x-y+2=0$의 해를 구하여 다음 표를 완성해 보자.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…								…

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 해 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내 보자.

x, y의 값이 정수일 때, 일차방정식 $2x+y-1=0$의 해 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다. 또 x, y의 값의 범위가 모든 수일 때, 일차방정식 $2x+y-1=0$의 해를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 2]와 같이 직선이 됨을 알 수 있다.

[그림 1] [그림 2]

일차방정식 $ax+by+c=0$에서 x, y의 값이 구체적으로 주어지지 않으면 x, y의 값의 범위는 모든 수로 생각한다.

일반적으로 두 미지수 x, y의 값의 범위가 모든 수일 때, 일차방정식

$$ax+by+c=0 \text{ (단, } a, b, c\text{는 상수, } a\neq 0, b\neq 0)$$

의 해는 무수히 많고, 이 해 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다. 이 직선을 일차방정식의 그래프라고 한다.

한편 앞에서 [그림 2]의 직선은 기울기가 -2이고 y절편이 1이므로 일차함수 $y=-2x+1$의 그래프와 같다. 즉 일차방정식 $2x+y-1=0$의 그래프는 일차함수 $y=-2x+1$의 그래프와 같음을 알 수 있다.

일차방정식 $2x+y-1=0$에서 y를 x의 식으로 나타내면 $y=-2x+1$을 얻는다.

일반적으로 $a \neq 0$, $b \neq 0$일 때, 일차방정식 $ax+by+c=0$에서 y를 x의 식으로 나타내면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

와 같은 일차함수의 식을 얻는다.

따라서 일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$ax+by+c=0$
$(a\neq0,\ b\neq0)$

일차함수 ↓↑ 일차방정식

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

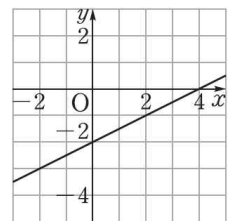
일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계

미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$(단, a, b, c는 상수, $a \neq 0$, $b \neq 0$)의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같다.

예제 1 일차방정식 $x-2y-4=0$의 그래프를 그리시오.

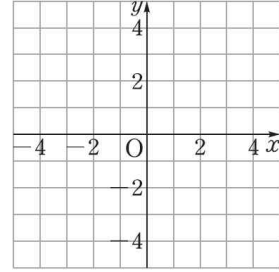
풀이 일차방정식 $x-2y-4=0$에서 y를 x의 식으로 나타내면

$$y=\frac{1}{2}x-2$$

따라서 일차방정식 $x-2y-4=0$의 그래프는 일차함수 $y=\frac{1}{2}x-2$의 그래프와 같으므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

문제 1 다음 일차방정식의 그래프를 그리시오.

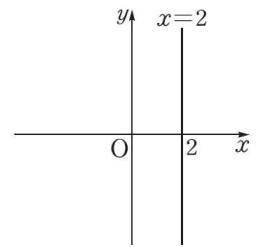
(1) $x-3y+3=0$

(2) $3x+2y+4=0$

방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

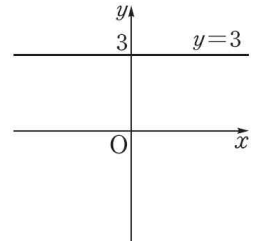
방정식 $ax+by+c=0$에서 계수 a나 b 중 어느 하나가 0인 경우의 그래프를 그려 보자.

방정식 $x=2$를 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타내면

$$x+0\times y-2=0$$

이고, 이 방정식의 y에 어떤 값을 대입하여도 x의 값은 항상 2이다. 따라서 방정식 $x=2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이다.

또 방정식 $y=3$을 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타내면

$$0\times x+y-3=0$$

이고, 이 방정식의 x에 어떤 값을 대입하여도 y의 값은 항상 3이다. 따라서 방정식 $y=3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(0,\ 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이다.

일반적으로 방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프는 다음과 같다.

방정식 $x=0$의 그래프는 y축을, 방정식 $y=0$의 그래프는 x축을 나타낸다.

방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

❶ $x=p$ (단, $p\neq0$)의 그래프는 점 $(p,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이다.

❷ $y=q$ (단, $q\neq0$)의 그래프는 점 $(0,\ q)$를 지나고 x축에 평행한 직선이다.

이상을 정리하면 두 미지수 x, y의 값의 범위가 모든 수일 때, 방정식

$$ax+by+c=0\ (\text{단, } a,\ b,\ c\text{는 상수, } a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0)$$

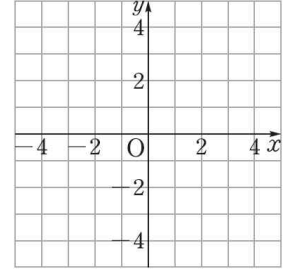
의 그래프는 직선이다. 이때 방정식 $ax+by+c=0$을 **직선의 방정식**이라고 한다.

문제 2 다음 방정식의 그래프를 그리시오.

(1) $x-4=0$

(2) $y+1=0$

(3) $-2x-6=0$

(4) $\frac{1}{2}y-1=0$

문제 3 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2,\ 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선

(2) 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 y축에 평행한 직선

설명하기

다음은 도훈이가 쓴 수학 일기의 일부분이다. 도훈이의 궁금증을 해결해 주기 위해 예를 들어 설명해 보자.

20○○년 ○○월 ○○일 날씨: 맑음

오늘 수학 시간에 일차함수와 일차방정식의 관계를 배웠다.
선생님께서 좌표평면 위의 모든 직선은 방정식으로 나타낼 수 있다고 하셨다.
하지만 좌표평면 위의 모든 직선을 일차함수의 식으로 나타낼 수 있는 것은 아니라고 하시면서 그 이유를 설명해 주셨다.
그런데 나는 잘 이해가 되지 않았다. 다시 곰곰이 생각해 봐도 잘 모르겠다.

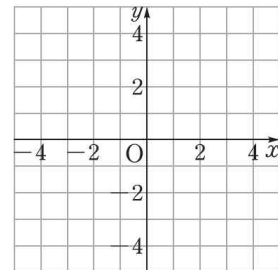
확인하기

1 다음 방정식의 그래프를 그리시오.

(1) $5x+y-4=0$

(2) $2x-3y-6=0$

(3) $4x-12=0$

(4) $3y+9=0$

2 점 $(6,\ -5)$를 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

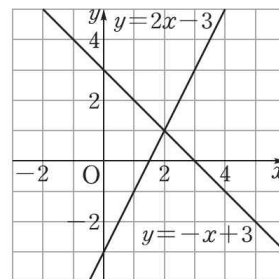
일차함수의 그래프와 연립일차방정식

두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 관계를 이해한다.

일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 해

오른쪽 그림은 두 일차함수

$y=-x+3,\ y=2x-3$

의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 것이다.

탐구 ① 두 그래프의 교점의 좌표를 말해 보자.

탐구 ② 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ -2x+y=-3 \end{cases}$ 의 해 $(x,\ y)$를 구해 보자.

탐구 ③ 탐구 ①과 탐구 ②의 결과를 비교해 보자.

위의 생각톡에서 두 일차함수 $y=-x+3$과 $y=2x-3$의 그래프의 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$임을 알 수 있다.

그런데 일차함수 $y=-x+3$의 그래프는 일차방정식 $x+y=3$의 그래프와 같고, 일차함수 $y=2x-3$의 그래프는 일차방정식 $-2x+y=-3$의 그래프와 같다.

따라서 두 일차함수 $y=-x+3$과 $y=2x-3$의 그래프의 교점의 좌표 $(2,\ 1)$은 연립방정식

$$\begin{cases} x+y=3 \\ -2x+y=-3 \end{cases}$$

의 해가 된다.

일반적으로 연립방정식의 해와 두 일차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

연립방정식의 해
$x=a,\ y=b$

↓↑

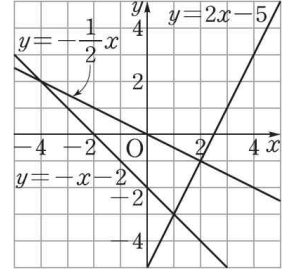
두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표
$(a,\ b)$

두 일차함수의 그래프와 연립방정식의 관계

미지수가 2개인 두 일차방정식으로 이루어진 연립방정식의 해와 각 방정식의 그래프, 즉 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표는 같다.

문제 1 오른쪽 그래프를 보고 다음 방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x+2y=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

문제 2 연립방정식을 이용하여 다음 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=x-5$, $y=3x-1$

(2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $y=-x+4$

연립방정식을 이루는 두 일차방정식의 그래프가 평행하거나 일치하는 경우에 연립방정식의 해가 어떻게 되는지 알아보자.

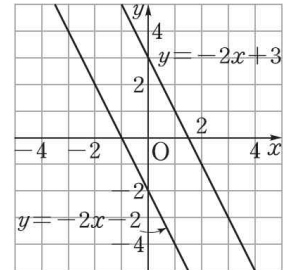
예제 1 그래프를 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=-4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$

풀이 (1) 주어진 방정식에서 각각 y를 x의 식으로 나타내면

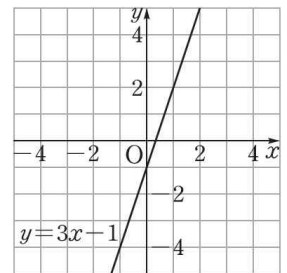
$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=-2x-2 \end{cases}$$

이므로 두 방정식의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 서로 평행하다.

따라서 두 직선은 만나지 않으므로 주어진 연립방정식의 해는 없다.

(2) 주어진 방정식에서 각각 y를 x의 식으로 나타내면

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ y=3x-1 \end{cases}$$

이므로 두 방정식의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 일치한다.

따라서 두 직선의 교점이 무수히 많으므로 주어진 연립방정식의 해는 무수히 많다.

이때 연립방정식의 해는 $3x-y=1$을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y)이다.

답 (1) 해는 없다. (2) 해는 무수히 많다.

문제 3 그래프를 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=9 \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} 2x+3y=-6 \\ 6x+9y=9 \end{cases}$

일반적으로 연립방정식의 해와 두 일차방정식의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

 연립방정식의 해와 그래프

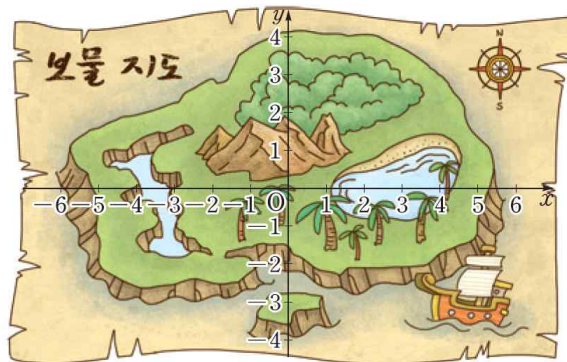
연립방정식에서 두 일차방정식의 그래프가

❶ 한 점에서 만나면 연립방정식의 해는 하나이다.

❷ 평행하면 연립방정식의 해는 없다.

❸ 일치하면 연립방정식의 해는 무수히 많다.

 적용하기

혜리는 다락방에서 보물 지도와 보물의 위치를 나타내는 단서를 발견하였다. 두 단서를 모두 만족시키는 점의 좌표가 보물의 위치일 때, 보물의 위치를 지도 위에 나타내 보자.

[단서 1] 보물은 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 y절편이 -1인 직선 위에 있다.

[단서 2] 보물은 일차방정식 $x+y-4=0$의 그래프 위에 있다.

확인하기

1 연립방정식을 이용하여 다음 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=x+1$, $y=2x+4$　　　　(2) $y=-x+3$, $y=\frac{3}{2}x-2$

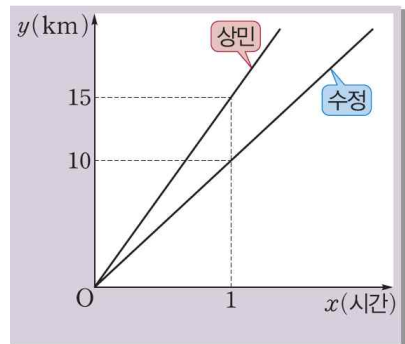
그래프의 기울기와 속력의 관계 해석하기

속력은 물체의 빠르기를 나타내는 양으로 이동 시간에 대한 이동 거리의 비율, 즉 단위 시간당 이동한 거리를 의미한다. 일정한 속력으로 움직이는 물체의 이동 시간을 x시간, 이동 거리를 y km라고 하면 y는 x에 대한 일차함수이다.

활동 1 오른쪽 그림은 상민이와 수정이가 직선 도로를 따라 일정한 속력으로 자전거를 타고 갈 때, 이동 시간 x시간에 따른 이동 거리 y km를 그래프로 나타낸 것이다.

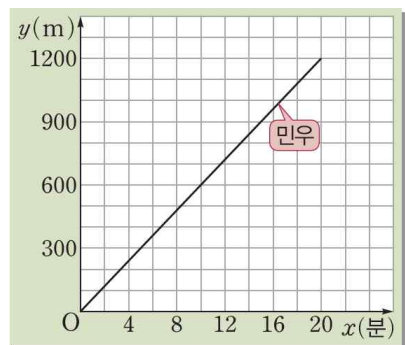
(1) 상민이와 수정이의 자전거의 속력을 각각 구해 보자.

(2) 오른쪽 그림에서 각각의 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구해 보자.

(3) 자전거의 속력과 일차함수의 식을 비교하고, 알게 된 점을 말해 보자.

활동 2 진수와 민우는 학교에서 1200 m 떨어진 공원에 가는데 진수는 민우가 출발한 지 6분 후에 분속 100 m의 일정한 속력으로 걸어갔다. 오른쪽 그림은 민우가 출발한 지 x분이 지났을 때 민우의 이동 거리 y m를 그래프로 나타낸 것이다.

(1) 민우의 속력을 구해 보자.

(2) 민우가 출발한 지 x분이 지났을 때 진수의 이동 거리 y m를 오른쪽 좌표평면 위에 그래프로 나타내 보자.

(3) 민우가 출발한 지 몇 분 후에 진수와 민우가 만나는지 구해 보자.

중단원 마무리

Ⅳ-2 일차함수와 일차방정식의 관계

정답 및 풀이 286쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 일차함수와 일차방정식 129쪽

(1) 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프는 같다.

(2) 방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

① $x=p$ (단, $p\neq0$)의 그래프는 점 $(p,\ 0)$을 지나고 ☐에 평행한 직선이다.

② $y=q$ (단, $q\neq0$)의 그래프는 점 $(0,\ q)$를 지나고 ☐에 평행한 직선이다.

(3) x, y의 값의 범위가 모든 수일 때, 방정식

$ax+by+c=0$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$)

을 ☐이라고 한다.

❷ 일차함수의 그래프와 연립일차방정식 132쪽

(1) 미지수가 2개인 두 일차방정식으로 이루어진 연립방정식의 해와 각 방정식의 그래프, 즉 두 일차함수의 그래프의 ☐의 좌표는 같다.

(2) 연립방정식에서 두 일차방정식의 그래프가

① 한 점에서 만나면 연립방정식의 해는 ☐이다.

② 평행하면 연립방정식의 해는 ☐.

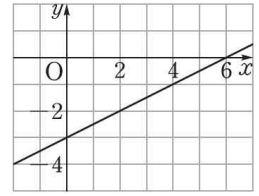
③ 일치하면 연립방정식의 해는 ☐.

표준 문제

01 일차방정식 $ax-y+4=0$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

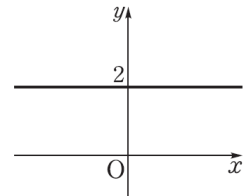
02 일차방정식 $x-4y-10=0$의 그래프의 기울기를 a, y절편을 b라고 할 때, $8ab$의 값을 구하시오.

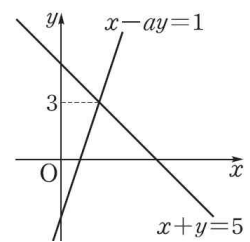
03 일차방정식 $ax+y-a-b=0$의 그래프가 오른쪽 그래프와 평행하고 제2사분면을 지나지 않도록 하는 b의 값의 범위를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

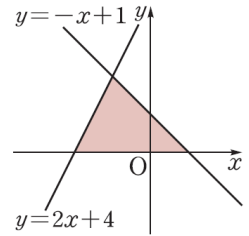
서술형

04 두 점 $(a-3,\ 3)$, $(3-2a,\ a)$를 지나는 직선이 x축에 수직일 때, 다음에 답하시오.

(1) a의 값을 구하시오.

(2) 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

05 방정식 $ax+by+4=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

문제 해결

06 연립방정식 $\begin{cases} x-ay=1 \\ x+y=5 \end{cases}$ 의 각 일차방정식의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

07 두 일차방정식 $x-y+2=0$, $2x+5y+11=0$의 그래프의 교점을 지나고 y절편이 -10인 직선의 방정식을 구하시오.

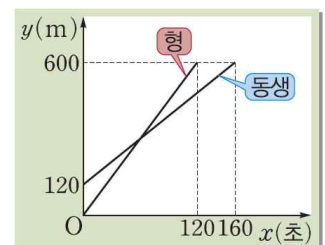
서술형 **08** 오른쪽 그림과 같이 두 일차함수 $y=2x+4$, $y=-x+1$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

09 두 일차방정식 $ax+y=2$, $x-by=4$의 그래프의 교점이 무수히 많을 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

도전 문제

서술형 **10** 네 직선 $2y-5=0$, $x-3a=0$, $y=-2$, $x+a=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 18일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

추론 **11** 세 직선 $ax+y+4=0$, $x-y-3=0$, $3x+y-5=0$이 삼각형을 만들지 않도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하시오.

서술형 **12** 동생과 형이 600 m 달리기 시합을 하는데 동생이 출발선으로부터 120 m 앞에서 출발하기로 하였다. 오른쪽 그림은 두 사람이 동시에 출발한 지 x초 후에 출발선으로부터의 거리를 y m라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 두 사람이 출발한 지 몇 초 후에 형이 동생을 앞지르기 시작했는지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

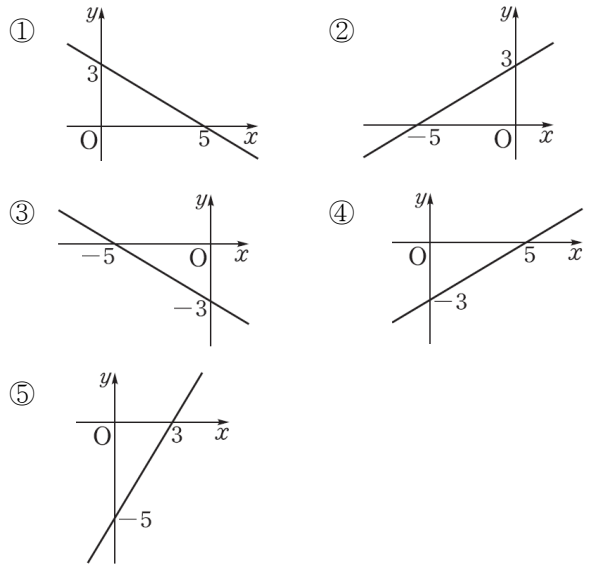
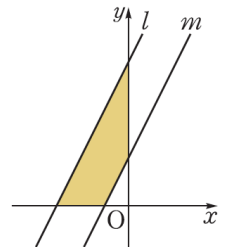
정답 및 풀이 288쪽

01 어느 자동차 회사에서 개발한 친환경 전기 자동차는 배터리를 1시간 충전할 때마다 40 km씩 주행할 수 있다고 한다. 이 배터리를 x시간 충전하였을 때, 주행할 수 있는 거리를 y km라고 하자. 다음에 답하시오.

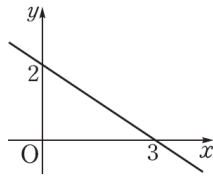
(1) $y=f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하시오.
(2) $f(6)$을 구하시오.

02 다음에서 y가 x에 대한 일차함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

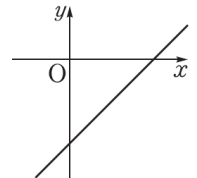
① 한 권에 x원인 공책 y권의 값은 5000원이다.
② 500원짜리 동전 2개와 100원짜리 동전 x개를 합친 금액은 y원이다.
③ 반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이는 $y\text{ cm}^2$이다.
④ 시속 x km로 y시간 동안 달린 거리는 100 km이다.
⑤ 200쪽 분량의 책을 매일 x쪽씩 7일 동안 읽고 남은 분량은 y쪽이다.

03 일차함수 $y=3x-2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1,\ -4)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

04 다음에서 일차함수 $y=\frac{3}{5}x-3$의 그래프는?

①
②
③
④
⑤
05 오른쪽 그림에서 직선 l은 일차함수 $y=2x+6$의 그래프이고, 직선 m은 직선 l을 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다. 이때 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

06 세 점 $(-1,\ 6)$, $(1,\ 2)$, $(4,\ a)$가 한 직선 위에 있을 때 a의 값을 구하시오.

07 오른쪽 일차함수의 그래프와 평행한 일차함수 $y=ax+4$의 그래프의 x절편을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

08 일차함수 $y=-\frac{1}{4}x+1$의 그래프와 x축에서 만나고, 일차함수 $y=\frac{3}{5}x-2$의 그래프와 y축에서 만나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

09 일차방정식 $2x+by+5=0$의 그래프가 점 $(-3,\ 4)$를 지날 때, 이 그래프의 기울기를 구하시오. (단, b는 상수이다.)

10 일차방정식 $ax-by+1=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음에서 옳은 것은? (단, a, b는 상수이다.)

① $a>0,\ b>0$　② $a>0,\ b<0$
③ $a=0,\ b<0$　④ $a<0,\ b>0$
⑤ $a<0,\ b<0$

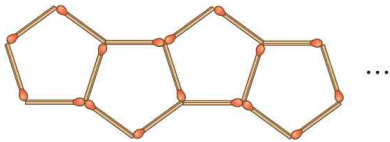
11 두 일차함수 $y=2x-2$, $y=5x+7$의 그래프의 교점을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

12 두 일차방정식 $-2x+y-2=0$, $ax-3y+1=0$의 그래프의 교점이 없을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

서술형

13 일차함수 $y=ax+7$에서 x의 값이 2에서 5까지 증가할 때, y의 값은 9만큼 감소한다. 이 일차함수의 그래프가 점 $(-1,\ b)$을 지날 때, $b-a$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, a는 상수이다.)

풀이

14 아래 그림과 같이 길이와 모양이 같은 성냥개비를 이용하여 정오각형을 연결하여 만들 때, 다음에 답하시오.

(1) 정오각형 x개를 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 y라고 할 때, y를 x의 식으로 나타내시오.

(2) 정오각형 15개를 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 구하시오.

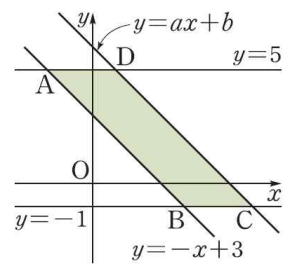
풀이

15 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그리는데 민우는 x의 계수를 잘못 보아 두 점 $(-1,\ 8)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선을 그렸고, 희수는 상수항을 잘못 보아 두 점 $(-2,\ 0)$, $(-1,\ 2)$를 지나는 직선을 그렸다. 바르게 그려진 일차함수의 그래프의 x절편을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 오른쪽 그림과 같이 네 직선 $y=-x+3$, $y=ax+b$, $y=5$, $y=-1$의 교점을 각각 A, B, C, D라고 할 때, 사각형 ABCD는 평행사변형이다. 사각형 ABCD의 넓이가 18일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, $b>3$)

풀이

자기 평가

❶ 함수와 일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.

❷ 일차함수의 그래프의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

❸ 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 이해한다.

❹ 두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 관계를 이해한다.

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

우리 주변의 경사로 조사하기

우리 주변에서 여러 가지 경사로나 경사면을 쉽게 볼 수 있다. 예를 들어 장애인이 휠체어를 타고 다닐 수 있는 경사로, 주차장으로 들어갈 때의 경사로, 산을 오를 수 있도록 깎아 만든 경사면 등이 있다.

우리나라에서는 법으로 여러 가지 경사로의 기울기의 설치 기준을 다음과 같이 규정하고 있다.

장애인이 휠체어를 타고 통행할 수 있는 경사로의 기울기

➡ $\frac{1}{12}$ 이하

건물에서 계단을 대체하는 경사로의 기울기

➡ $\frac{1}{8}$ 이하

노외주차장 진입 직선 차로의 경사로의 기울기

➡ $\frac{1}{6}$ 이하

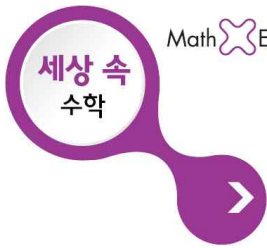
(출처: 국가법령정보센터, 2017)

과제 1 우리 주변의 경사로를 다음과 같은 순서로 조사해 보자.

❶ 모둠별로 조사할 경사로를 정하여 사진을 찍고, 줄자를 이용하여 경사로의 수평 거리와 수직 거리를 측정한다.

❷ ❶에서 측정한 값을 이용하여 경사로의 기울기를 소수점 아래 둘째 자리까지 구한다.

과제 2 우리 주변에서 장애인용 경사로를 추가로 설치할 수 있는 장소를 찾아보자.

Math Environment

일차함수를 통해 본 지구 환경 보호

탄소 발자국은 일상생활에서 사람이 활동하거나 상품을 생산소비하는 모든 과정에서 직간접적으로 생겨나는 이산화 탄소의 총량을 의미한다. 지구 온난화, 이상 기후 등의 원인의 하나인 이산화 탄소의 발생량을 감소하자는 뜻에서 탄소 발자국을 사용하기 시작했다.

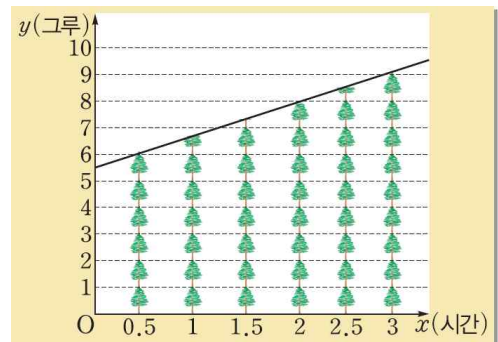
여러 가지 활동으로 줄일 수 있는 탄소 발자국은 다음과 같다.

활동	감소량
에어컨 냉방 온도 2℃ 높이기	5300 g
TV 사용 시간 1시간 줄이기	7900 g
음식물 쓰레기 20% 줄이기	36200 g
유리병, 캔 등 분리배출하기	88000 g

예를 들어 음식물 쓰레기를 20% 줄이면 36200 g의 이산화 탄소를 줄여 5.5그루의 소나무를 심는 효과를 얻을 수 있고, TV 사용 시간을 1시간 줄이면 7900 g의 이산화 탄소를 줄여 1.2그루의 소나무를 심는 효과를 얻을 수 있다.

가정에서 배출하는 음식물 쓰레기를 20% 줄이고 TV 사용 시간을 x시간 줄일 때, 그에 따른 이산화 탄소의 감소 효과를 y그루의 소나무로 나타내면 다음과 같은 일차함수의 식을 얻는다.

$$y = 1.2x + 5.5$$

이 일차함수를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 줄어드는 TV 사용 시간에 따라 몇 그루의 소나무를 심는 효과를 내는지 알 수 있다.

이와 같이 탄소 발자국을 줄이려고 노력한다면 지구 환경을 보호할 수 있다.

(출처: 한국 기후·환경 네트워크, 2017)

진로 탐색

환경 공학자 | 각종 환경 오염 문제를 확인하여 연구·개발을 통해 방지 대책을 세우고 개선 방안을 수립한다.

V
도형의 성질
배운 내용
이 단원의 내용
배울 내용
초 5~6
• 합동과 대칭
중 수학 1
• 기본 도형
• 평면도형
1 삼각형의 성질
• 이등변삼각형의 성질
• 직각삼각형
• 삼각형의 외심과 내심
2 사각형의 성질
• 평행사변형의 성질
• 여러 가지 사각형의 성질
중 수학 2
• 도형의 닮음
• 닮음의 응용
• 피타고라스 정리
중 수학 3
• 삼각비
• 원의 성질

놀이공원에 가면 여러 건물과 놀이 기구에서 삼각형과 사각형 구조를 찾아볼 수 있는데 이는 삼각형과 사각형의 구조가 견고하고 안정적이기 때문이다.
이 단원에서는 여러 가지 삼각형과 사각형의 성질을 알아본다.
마법의 양탄자

희망 병원 짓기

세 마을에서 거리가 같은 지점이면 좋겠는데?

병원을 어디에 지으면 좋을까?

그 지점을 어떻게 찾지?

1 삼각형의 성질

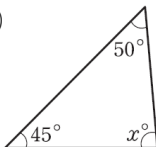
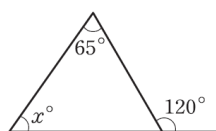
준비 학습

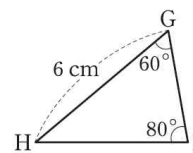
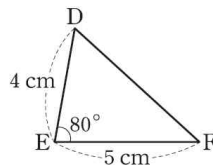
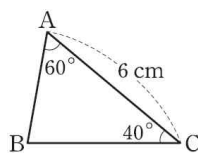
삼각형

❶ 다음 삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)

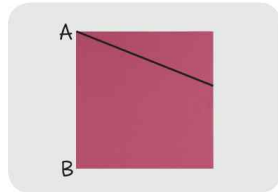
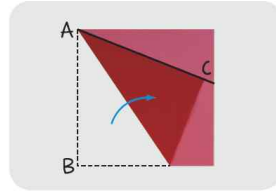
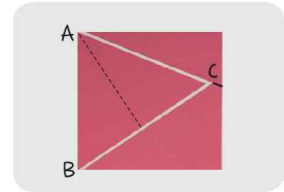
(2)

65°
x°
120°

삼각형의 합동 조건

❷ 다음 삼각형 중에서 서로 합동인 것을 찾아 기호 ≡를 사용하여 나타내고 합동 조건을 말하시오.

이등변삼각형의 성질

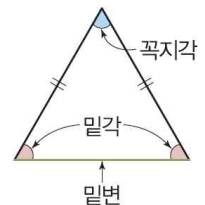
이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

이등변삼각형의 성질

다음과 같이 삼각형을 만들어 보자.

❶ 정사각형 모양의 종이에서 한 꼭짓점 A를 지나는 직선을 긋는다.

❷ ❶에서 그은 선에 변 AB가 겹치도록 접고 점 B와 겹치는 곳에 점 C를 표시한다.

❸ 접은 부분을 펼쳐 선분 BC를 긋고 삼각형 ABC를 오려 낸다.

탐구 ① 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말해 보자.

탐구 ② 삼각형 ABC에서 ∠B와 크기가 같은 각을 찾아보자.

이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이다. 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변이 이루는 각을 꼭지각, 꼭지각의 대변을 밑변, 밑변의 양 끝 각을 밑각이라고 한다.

위의 생각톡에서 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 관찰할 수 있다.

이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 설명해 보자.

$\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하자.

△ABD와 △ACD에서

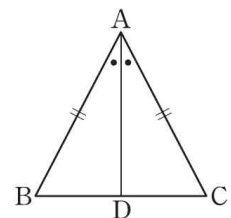
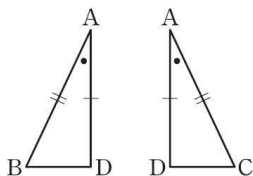
$\overline{AB}=\overline{AC}$ ······①

∠BAD = ∠CAD ······②

$\overline{AD}$는 공통 ······③

이다. 따라서 ①, ②, ③에서 △ABD ≡ △ACD (SAS 합동)이므로

∠B = ∠C

이다. 즉 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다. 이를 설명해 보자.

$\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하면 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$이므로

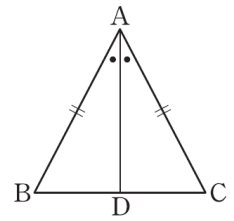
$$\overline{BD}=\overline{CD} \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 또 $\angle ADB=\angle ADC$이고 $\angle ADB+\angle ADC=180°$이므로

$$\angle ADB=\angle ADC=90° \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 따라서 ①, ②에서 $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분한다.

$\angle ADB=90°$이므로 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$이다.

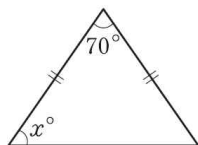
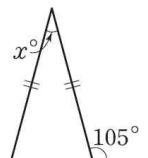
즉 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이등변삼각형의 성질

❶ 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

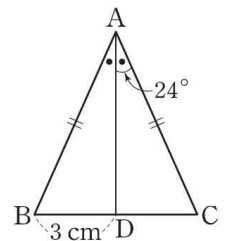
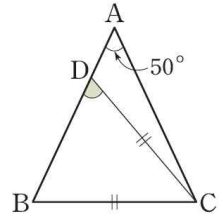
❷ 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

문제 1 다음 삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 하자. $\overline{BD}=3\,\text{cm}$, $\angle CAD=24°$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{CD}$의 길이

(2) $\angle ADB$의 크기

(3) $\angle C$의 크기

문제 3 오른쪽 그림과 같이 $\angle A = 50°$이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = \overline{CD}$가 되도록 변 AB 위에 점 D를 잡을 때, $\angle BDC$의 크기를 구하시오.

이등변삼각형이 되는 조건

두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다. 이를 설명해 보자.

$\angle B = \angle C$인 $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하자.

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서

$\angle BAD = \angle CAD$ ……①

$\overline{AD}$는 공통 ……②

이다. 또 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 항상 일정하고 $\angle B = \angle C$, $\angle BAD = \angle CAD$이므로

$\angle ADB = \angle ADC$ ……③

이다. 따라서 ①, ②, ③에서 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (ASA 합동)이므로

$\overline{AB} = \overline{AC}$

이다. 즉 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

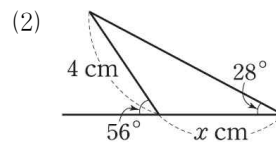
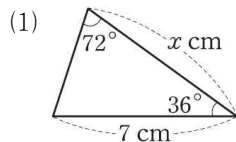
이상을 정리하면 다음과 같다.

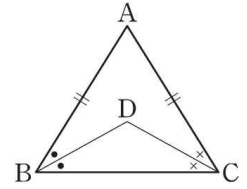
이등변삼각형이 되는 조건

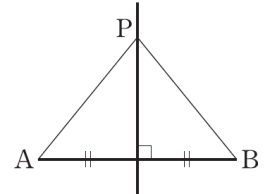
두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

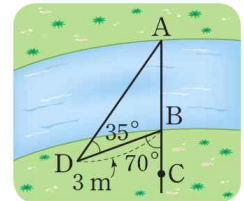
문제 4 다음 삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)

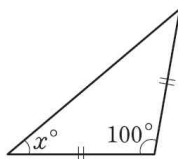
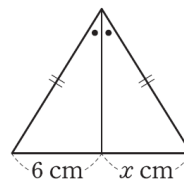
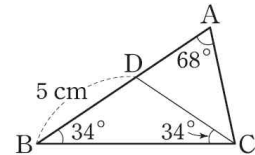
(2)

추론

문제 5 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 ∠B와 ∠C의 이등분선의 교점을 D라고 할 때, 삼각형 DBC는 이등변삼각형임을 설명하시오.

추론

문제 6 선분 AB의 수직이등분선 위의 한 점 P에서 선분 PA, PB를 그었을 때 생기는 삼각형 PAB는 $\overline{PA}=\overline{PB}$인 이등변삼각형임을 설명하시오.

설명하기

강의 폭을 직접 측정하지 않고 그 길이를 구하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 폭 AB의 연장선 위에 점 C를 잡고 ∠DBC = 70°, ∠ADB = 35°가 되는 D지점을 찾았더니 $\overline{DB}$ = 3 m이었다. 강의 폭 AB의 길이를 구하고, 그 이유를 설명해 보자.

확인하기

1 다음 삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

2 오른쪽 삼각형 ABC에서 ∠A = 68°, ∠DBC = ∠DCB = 34°, $\overline{BD}$ = 5 cm일 때, 변 AC의 길이를 구하시오.

사고력+ 이등변삼각형 ABC에서 ∠A의 외각의 크기가 110°일 때, 다음과 같은 경우를 각각 그림에서 나타내고, 삼각형 ABC의 세 내각의 크기를 모두 구하시오.

(1) ∠A가 꼭지각인 경우 (2) ∠A가 밑각인 경우

직각삼각형

직각삼각형의 합동 조건을 이해하고 설명할 수 있다.

직각삼각형의 합동 조건

다음과 같이 $\angle C = \angle E = 90°$인 두 직각삼각형 ABC와 DFE에서 $\overline{AB} = \overline{DF} = 12\,m$, $\angle B = \angle F = 30°$이다.

탐구 ① $\angle A$와 $\angle D$의 크기를 비교해 보자.

탐구 ② 삼각형 ABC와 삼각형 DFE가 합동인 이유를 말해 보자.

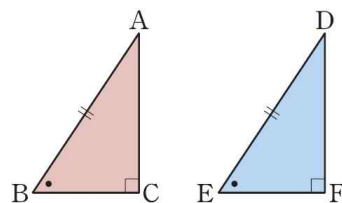
위의 생각톡에서 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동임을 관찰할 수 있다.

빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동임을 설명해 보자.

$\angle C = \angle F = 90°$인 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서

$\overline{AB} = \overline{DE}$ ……①

$\angle B = \angle E$ ……②

라고 하자.

직각삼각형의 한 내각은 직각이므로 한 예각의 크기를 알면 다른 예각의 크기도 알 수 있다.

$\angle A = 90° - \angle B = 90° - \angle E = \angle D$이므로

$\angle A = \angle D$ ……③

이다.

따라서 ①, ②, ③에서 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (ASA 합동)이다.

즉 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다.

빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다. 이를 설명해 보자.

$\angle C = \angle F = 90°$인 두 직각삼각형 ABC와 DEF에서 $\overline{AB} = \overline{DE}$이고 $\overline{AC} = \overline{DF}$라고 하자. 길이가 같은 두 변 AC와 DF가 맞닿도록 붙이면

평각의 크기는 180°이다.

$$\angle ACB + \angle DFE = 180°$$

이다. 즉 세 점 B, C(F), E는 한 직선 위에 있다.

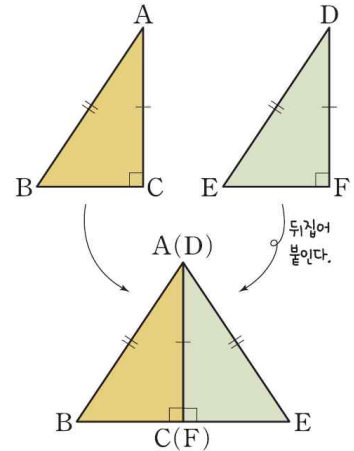
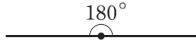
또

$$\overline{AB} = \overline{DE} \quad \cdots\cdots ①$$

에서 $\triangle ABE$는 이등변삼각형이므로

$$\angle B = \angle E \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

따라서 ①, ②에서 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이다.

즉 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

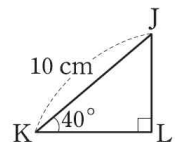
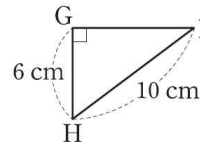
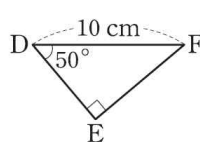
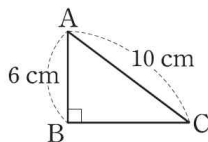
직각삼각형의 합동 조건 ❶을 RHA 합동, ❷를 RHS합동이라고 한다. 이때 R는 Right angle(직각), H는 Hypotenuse(빗변)의 첫 글자이다.

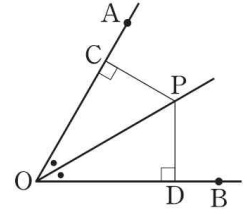
직각삼각형의 합동 조건

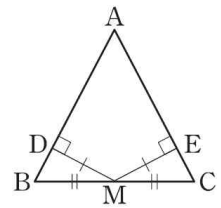
두 직각삼각형은 다음 각 경우에 서로 합동이다.

❶ 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같을 때

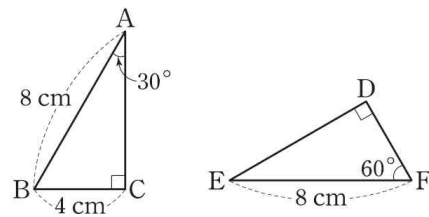
❷ 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같을 때

문제 1 다음 직각삼각형 중에서 서로 합동인 것을 찾아 기호 ≡를 사용하여 나타내고 각각의 합동 조건을 말하시오.

추론
문제 2

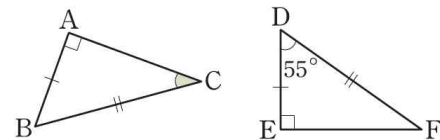
$\angle AOB$의 이등분선 위의 한 점 P에서 반직선 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 할 때, $\overline{PC}=\overline{PD}$임을 설명하시오.

추론
문제 3

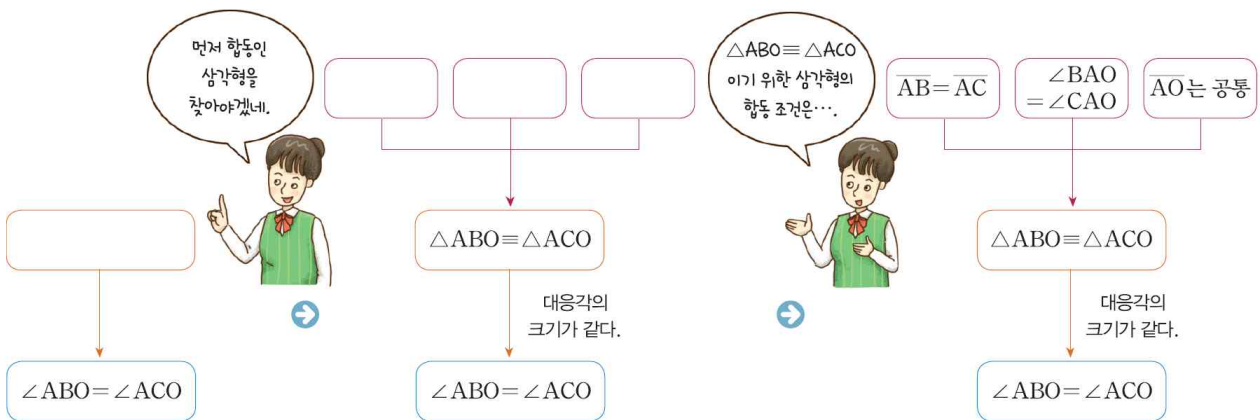
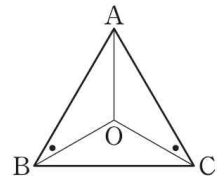
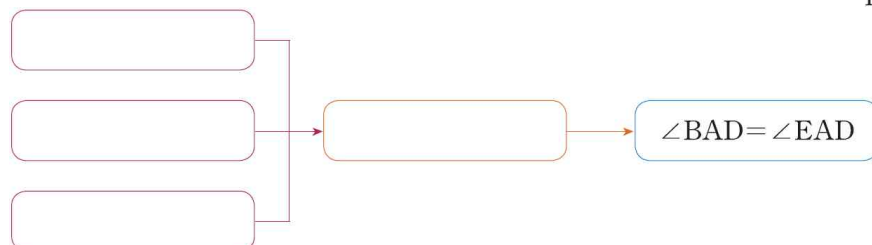
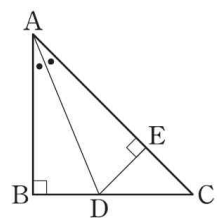
오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 한 변 BC의 중점 M에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{DM}=\overline{EM}$이면 삼각형 ABC가 이등변삼각형임을 설명하시오.

적용하기 두 변의 길이가 각각 6, 8인 두 직각삼각형은 항상 서로 합동인지 말해 보자.

확인하기

1 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=\angle D=90°$인 두 직각삼각형 ABC, DEF에서 $\overline{DF}$의 길이를 구하시오.

2 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=\angle E=90°$인 두 직각삼각형 ABC, DEF에서 $\angle C$의 크기를 구하시오.

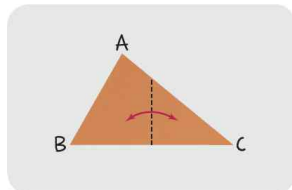
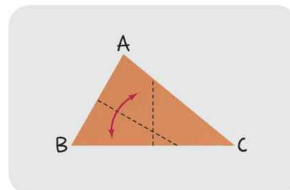
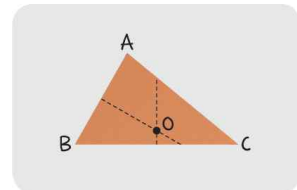
문제의 조건 추론하기

추론 의사소통

조건을 보고 결과를 예측하는 것뿐만 아니라 결과를 보고 그 결과가 나오게 된 조건을 추론하는 활동도 중요하다. 다음에서 주어진 결과를 보고 그 결과가 나오게 된 이유를 탐구해 보자.

정수는 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\angle ABO=\angle ACO$임을 발견하였다.
정수가 어떤 조건을 이용하여 $\angle ABO=\angle ACO$임을 발견하였을지 다인이는 다음과 같은 순서로 추론하였다.

활동 1 민희는 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\angle BAD=\angle EAD$임을 발견하였다. 민희가 어떤 조건을 이용하여 $\angle BAD=\angle EAD$임을 발견하였을지 추론하여 다음을 완성하고 짝과 비교해 보자.

삼각형의 외심과 내심

삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

삼각형의 외심

종이로 예각삼각형 ABC를 만들고 다음과 같이 활동해 보자.

❶ 두 꼭짓점 B, C가 겹치도록 접은 후 펼친다.

❷ 두 꼭짓점 A, B가 겹치도록 접은 후 펼친다.

❸ 접은 두 선이 만나는 점을 O로 표시한다.

탐구 ① ❶, ❷에서 생긴 접은 선이 각각 두 변 BC, AB의 수직이등분선임을 설명해 보자.

탐구 ② 두 꼭짓점 A, C가 겹치도록 접은 후 펼쳐서 생긴 접은 선이 점 O를 지나는지 말해 보자.

탐구 ③ 점 O에서 세 꼭짓점 A, B, C에 이르는 거리를 비교해 보자.

위의 에서 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고, 그 점에서 세 꼭짓점에 이르는 거리가 모두 같음을 관찰할 수 있다.

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고, 그 점에서 세 꼭짓점에 이르는 거리가 모두 같음을 설명해 보자.

△ABC에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 수직이등분선의 교점을 O라고 하자.

점 O는 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 수직이등분선 위의 점이므로

$$\overline{OA}=\overline{OB},\ \overline{OA}=\overline{OC} \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

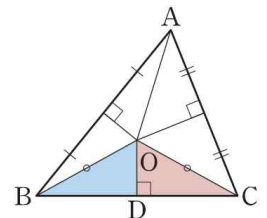
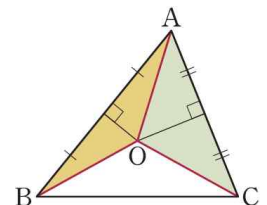
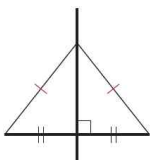
선분의 수직이등분선 위의 한 점에서 선분의 양 끝 점에 이르는 거리는 같다.

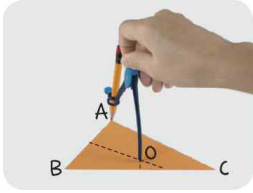
이때 점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라고 하면 △OBD와 △OCD에서

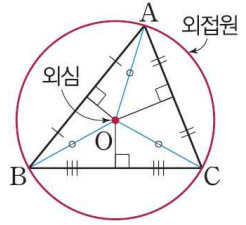
$$\angle ODB = \angle ODC = 90° \quad \cdots\cdots ②$$

$$\overline{OB}=\overline{OC} \quad \cdots\cdots ③$$

$\overline{OD}$는 공통 ……④

이다. ②, ③, ④에서 △OBD ≡ △OCD이다.

즉 $\overline{BD}=\overline{CD}$ 이므로 $\overline{OD}$ 는 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선이다.

따라서 △ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점 O에서 만난다.

한편 ①에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 이므로 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OA}$ 인 원을 그리면 이 원은 △ABC의 세 꼭짓점을 모두 지난다.

이와 같이 삼각형 ABC의 모든 꼭짓점이 원 O 위에 있을 때, 원 O는 삼각형 ABC에 **외접**한다고 한다. 또 원 O를 삼각형 ABC의 **외접원**이라 하며 외접원의 중심 O를 삼각형 ABC의 **외심**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

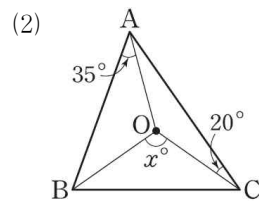
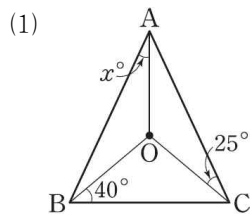
삼각형의 외심

❶ 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

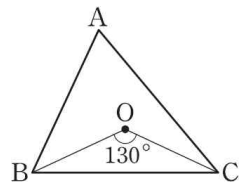
❷ 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

문제 1 다음 그림에서 점 O가 삼각형 ABC의 외심일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 2 오른쪽 그림에서 점 O가 삼각형 ABC의 외심이고, $\angle BOC=130°$일 때, 다음을 구하시오.

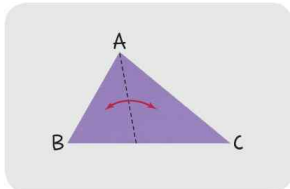
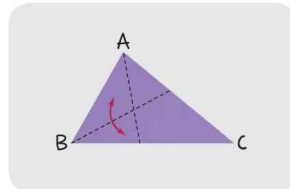
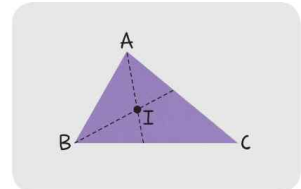
(1) ∠OBC의 크기

(2) ∠A의 크기

설명하기

미스터리 서클(Mystery Circle)이란 밭이나 논의 곡물을 일정한 방향으로 눕혀서 여러 개의 원 모양으로 만든 거대한 하나의 무늬를 말한다.
오른쪽 미스터리 서클에서 가장 큰 원의 중심을 찾는 방법을 설명해 보자.

삼각형의 내심

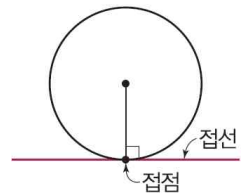
생각톡

종이로 삼각형 ABC를 만들고 다음과 같이 활동해 보자.

❶ 두 변 AB, AC가 겹치도록 접은 후 펼친다.

❷ 두 변 AB, BC가 겹치도록 접은 후 펼친다.

❸ 접은 두 선이 만나는 점을 I로 표시한다.

탐구① ❶, ❷에서 생긴 접은 선이 각각 $\angle A$, $\angle B$의 이등분선임을 설명해 보자.

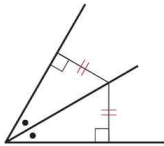
탐구② 두 변 AC, BC가 겹치도록 접은 후 펼쳐서 생긴 접은 선이 점 I를 지나는지 말해 보자.

탐구③ 점 I에서 세 변 AB, BC, CA에 이르는 거리를 비교해 보자.

원과 직선이 한 점에서 만날 때, 이 직선은 원에 **접한다**고 한다.
이때 이 직선을 원의 **접선**이라 하고, 접선이 원과 만나는 점을 **접점**이라고 한다. 또 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.

위의 생각톡에서 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만나고, 그 점에서 세 변에 이르는 거리가 모두 같음을 관찰할 수 있다.

삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만나고, 그 점에서 세 변에 이르는 거리가 모두 같음을 설명해 보자.

△ABC에서 ∠A와 ∠B의 이등분선의 교점을 I라 하고 점 I에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.

각의 이등분선 위의 한 점에서 그 각의 두 변에 내린 수선의 길이는 같다.

점 I는 ∠A, ∠B의 이등분선 위의 점이므로

$\overline{ID}=\overline{IF}$, $\overline{ID}=\overline{IE}$ ……①

이다.

이때 $\overline{IC}$를 그으면 △IEC와 △IFC에서

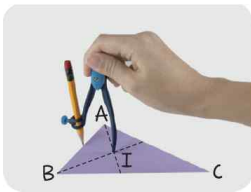
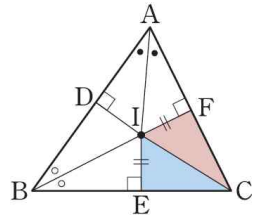
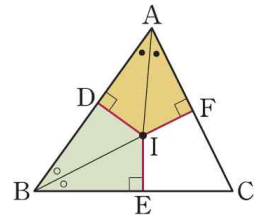
∠IEC = ∠IFC = 90° ……②

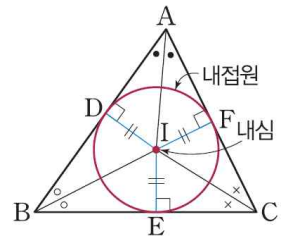
$\overline{IC}$는 공통 ……③

$\overline{IE}=\overline{IF}$ ……④

이다. ②, ③, ④에서 △IEC ≡ △IFC이다.

즉 ∠ICE = ∠ICF이므로 $\overline{IC}$는 ∠C의 이등분선이다.

따라서 △ABC의 세 내각의 이등분선은 한 점 I에서 만난다.

한편 ①에서 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$이므로 점 I를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{ID}$인 원을 그리면 이 원은 △ABC의 세 변과 각각 점 D, E, F에서 접한다.

이와 같이 원 I가 삼각형 ABC의 모든 변에 접할 때, 원 I는 삼각형 ABC에 **내접**한다고 한다. 또 원 I를 삼각형 ABC의 **내접원**이라 하며 내접원의 중심 I를 삼각형 ABC의 **내심**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

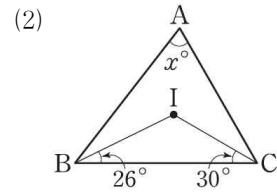
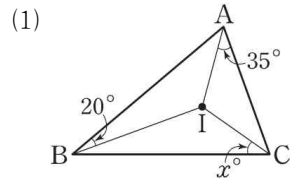
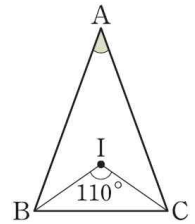
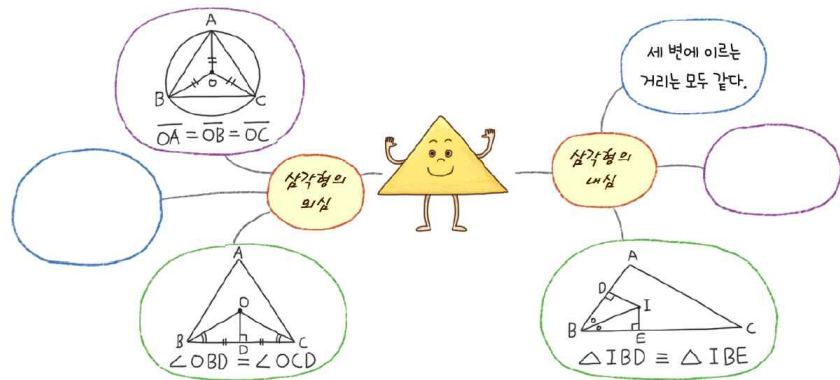
삼각형의 내심

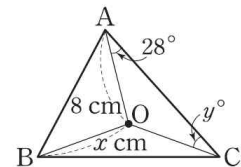
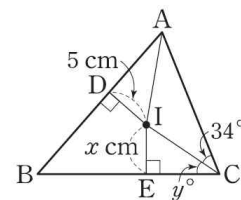
❶ 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.

❷ 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 모두 같다.

문제 3 다음 그림에서 점 I가 삼각형 ABC의 내심일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 4 오른쪽 그림에서 점 I가 삼각형 ABC의 내심이고, $\angle BIC = 110°$일 때, $\angle A$의 크기를 구하시오.

표현하기 삼각형의 외심, 내심의 뜻과 성질을 글, 그림, 기호를 사용하여 정리해 보자.

확인하기

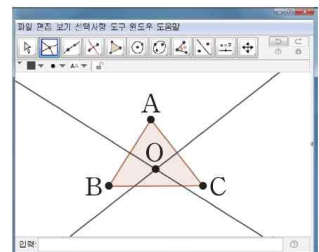
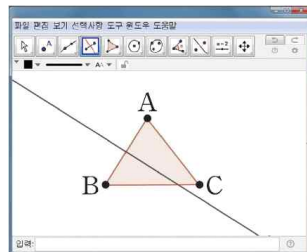
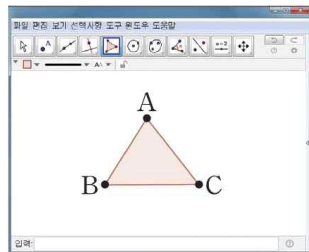
1 오른쪽 그림에서 점 O가 삼각형 ABC의 외심일 때, x, y의 값을 구하시오.

2 오른쪽 그림에서 점 I가 삼각형 ABC의 내심일 때, x, y의 값을 구하시오.

삼각형의 외심의 위치 탐구하기

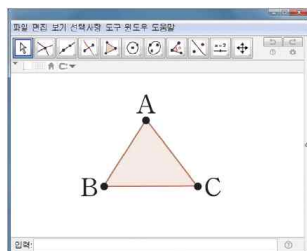
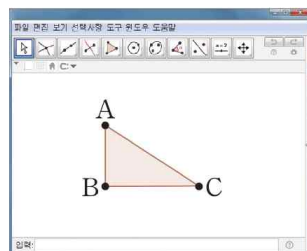
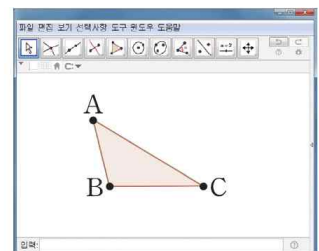
컴퓨터 프로그램을 이용하면 도형을 더욱 정확하고 빠르게 그릴 수 있고, 여러 가지 도형의 성질을 탐구하는 데에도 도움이 된다. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각형의 외심을 찾고 삼각형의 종류에 따른 외심의 위치를 탐구해 보자.

다음과 같은 순서로 예각삼각형 ABC의 외심 O를 찾아보자.

❶ [도구]를 선택하여 예각삼각형 ABC를 그린다.

❷ [도구]를 선택하여 $\overline{AB}$의 수직이등분선을 그린다.

❸ [도구]를 선택하여 $\overline{AC}$의 수직이등분선을 그리고 [도구]를 선택하여 두 직선의 교점 O를 찾는다.

활동 1 [도구]를 선택하여 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OA}$인 원을 그려 이 원이 삼각형 ABC의 외접원이 되는지 확인해 보자.

활동 2 **활동 1**의 결과에서 점 A를 움직이면서 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형일 때의 외심의 위치를 찾고 삼각형의 종류에 따른 외심의 위치를 말해 보자.

[예각삼각형]

[직각삼각형]

[둔각삼각형]

중단원 마무리

Ⅴ-1 삼각형의 성질

정답 및 풀이 290쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 이등변삼각형의 성질 147쪽

(1) 이등변삼각형의 성질

① 이등변삼각형의 두 ☐의 크기는 같다.

② 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 ☐한다.

(2) 이등변삼각형이 되는 조건

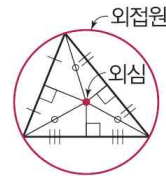
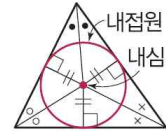
두 ☐의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

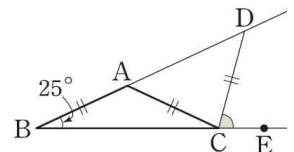
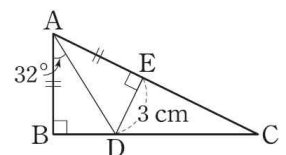
❷ 직각삼각형의 합동 조건 151쪽

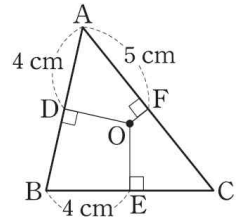
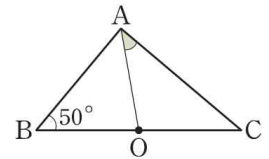
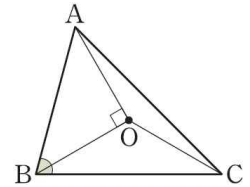
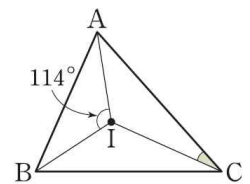
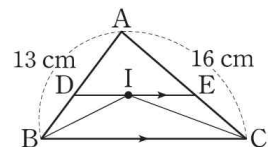
(1) ☐의 길이와 한 ☐의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다.

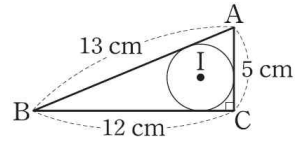
(2) 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다.

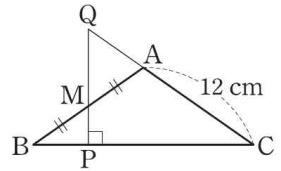
❸ 삼각형의 외심과 내심 155쪽

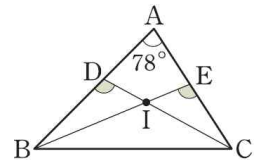
(1) 삼각형의 세 변의 ☐은 한 점(외심)에서 만나고 외심에서 삼각형의 세 ☐에 이르는 거리는 모두 같다.

(2) 삼각형의 세 내각의 ☐은 한 점(내심)에서 만나고 내심에서 삼각형의 세 ☐에 이르는 거리는 모두 같다.

표준 문제

01 오른쪽 그림과 같이 $\angle B = 25°$이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \overline{CD}$가 되도록 $\overline{BA}$의 연장선 위에 점 D를 잡았다. $\overline{BC}$의 연장선 위의 한 점을 E라고 할 때, $\angle DCE$의 크기를 구하시오.

02 오른쪽 그림과 같이 $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{AC} \perp \overline{DE}$이다. $\overline{DE} = 3\,\text{cm}$, $\angle BAD = 32°$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{BD}$의 길이　　(2) $\angle C$의 크기

03 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 외심 O에서 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자. $\overline{AD}=\overline{BE}=4\,cm$, $\overline{AF}=5\,cm$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하시오.

04 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 외심 O가 변 BC 위에 있다. $\angle B=50°$일 때, $\angle OAC$의 크기를 구하시오.

서술형 **05** 오른쪽 그림에서 점 O는 삼각형 ABC의 외심이고 $\angle AOB=90°$, $\angle BOC : \angle COA=4:5$일 때, $\angle ABC$의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

06 오른쪽 그림에서 점 I는 삼각형 ABC의 내심이고 $\angle AIB=114°$일 때, $\angle ACI$의 크기를 구하시오.

서술형 **07** 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내심 I를 지나고 $\overline{BC}$와 평행한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와 만나는 점을 각각 D, E라고 하자. $\overline{AB}=13\,cm$, $\overline{AC}=16\,cm$일 때, 삼각형 ADE의 둘레의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결

08 오른쪽 그림에서 점 I는 $\angle C = 90°$인 직각삼각형 ABC의 내심이고 $\overline{AB} = 13\,cm$, $\overline{BC} = 12\,cm$, $\overline{CA} = 5\,cm$일 때, 내접원의 반지름의 길이를 구하시오.

도전 문제

09 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 12\,cm$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 중점 M을 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 P, $\overline{CA}$의 연장선과 만나는 점을 Q라고 하자. 이때 $\overline{AQ}$의 길이를 구하시오.

추론

10 오른쪽 그림에서 점 I는 삼각형 ABC의 내심이고, $\overline{CI}$의 연장선과 $\overline{AB}$의 교점을 D, $\overline{BI}$의 연장선과 $\overline{AC}$의 교점을 E라고 하자. $\angle A = 78°$일 때, $\angle BDC + \angle BEC$의 크기를 구하시오.

11 오른쪽 그림에서 두 점 O, I는 각각 삼각형 ABC의 외심과 내심이고, 두 점 D, E는 각각 $\overline{AO}$, $\overline{AI}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 교점이다. $\angle BAD = 27°$, $\angle EAC = 40°$일 때, $\angle ADE$의 크기를 구하시오.

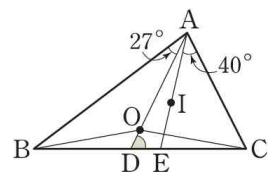
고소 작업대가 항상 수평을 유지하면서 올라가네.

위로 움직일 때 마름모 모양이 변하고 있어!

우아! 모양이 변해도 흔들림이 없어. 신기하다!

2 사각형의 성질

준비 학습

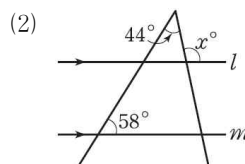
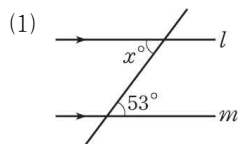
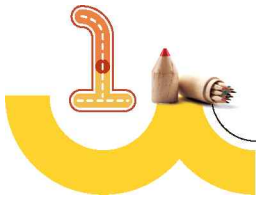
사각형

❶ 다음 사각형의 뜻을 말하시오.

(1) 평행사변형　　(2) 직사각형　　(3) 마름모　　(4) 정사각형

평행선의 성질

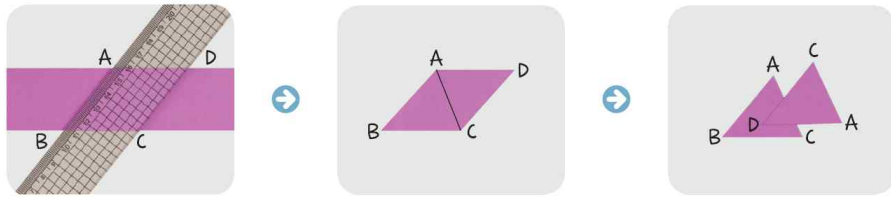
❷ 다음 그림에서 $l /\!/ m$일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

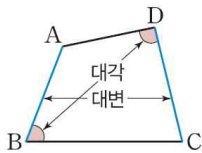
(2)

평행사변형의 성질

▶ 평행사변형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

평행사변형의 성질

직사각형 모양의 종이에 자를 대고 양쪽을 잘라 사각형을 얻은 후 대각선을 잘라 두 개의 삼각형을 만들어 보자.

탐구 ① 사각형 ABCD는 어떤 사각형인지 말해 보자.

탐구 ② 삼각형 ABC와 삼각형 CDA가 합동인지 종이를 포개어 확인해 보자.

탐구 ③ 삼각형 CDA에서 변 AB와 길이가 같은 변, $\angle B$와 크기가 같은 각을 찾아보자.

사각형 ABCD를 기호로 □ABCD와 같이 나타낸다.
또 사각형에서 마주 보는 두 변을 대변, 마주 보는 두 각을 대각이라고 한다.

평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형이다. 이제 평행사변형의 여러 가지 성질을 알아보자.

평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다. 이를 설명해 보자.

평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 그으면 $\triangle ABC$와 $\triangle CDA$에서

$\overline{AC}$는 공통 ……①

$\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이므로

$\angle BAC = \angle DCA$ (엇각) ……②

$\angle ACB = \angle CAD$ (엇각) ……③

평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 엇각의 크기는 같다.

이다. 따라서 ①, ②, ③에서 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (ASA 합동)이므로

$\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{DA}$, $\angle B = \angle D$

이다.

또 ②, ③에서

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$$
$$= \angle DCA + \angle ACB = \angle DCB$$

이다. 즉 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같고, 두 쌍의 대각의 크기도 각각 같다.

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다. 이를 설명해 보자.

평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하면 △ABO와 △CDO에서

$\overline{AB} = \overline{CD}$ (평행사변형의 대변) ……①

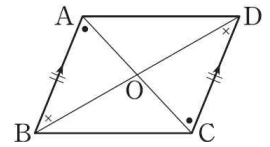
$\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$이므로

$\angle ABO = \angle CDO$ (엇각) ……②

$\angle BAO = \angle DCO$ (엇각) ……③

이다. 따라서 ①, ②, ③에서 △ABO ≡ △CDO (ASA 합동)이므로

$$\overline{OA} = \overline{OC},\ \overline{OB} = \overline{OD}$$

이다. 즉 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평행사변형의 성질

평행사변형에서

❶ 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.

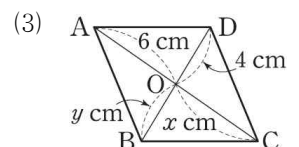
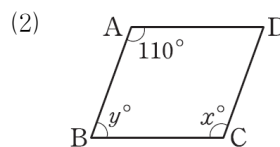
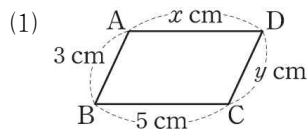
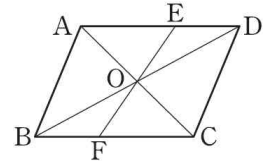
❷ 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.

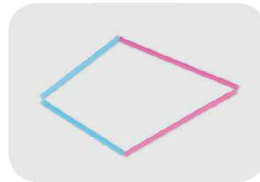
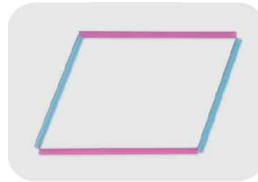
❸ 두 대각선은 서로를 이등분한다.

문제 1 다음 평행사변형 ABCD에서 x, y의 값을 구하시오. (단, O는 두 대각선의 교점이다.)

(1)

(2)

(3)

추론
문제 2 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점 O를 지나는 직선이 두 변 AD, BC와 만나는 점을 각각 E, F라고 할 때, $\overline{OE}=\overline{OF}$임을 설명하시오.

평행사변형이 되는 조건

다음은 길이가 같은 긴 빨대 한 쌍과 짧은 빨대 한 쌍을 실로 연결하여 모양이 다른 사각형 2개를 만든 것이다.

(가)
(나)
탐구 ① 두 사각형 (가), (나) 중에서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 것을 찾아보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 찾은 사각형은 평행사변형이라고 할 수 있는지 말해 보자.

위의 에서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형임을 관찰할 수 있다.

두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형임을 설명해 보자.

$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$인 □ABCD에서 대각선 AC를 그으면 △ABC와 △CDA에서

$\overline{AB}=\overline{CD}$ ……①

$\overline{BC}=\overline{DA}$ ……②

$\overline{AC}$는 공통 ……③

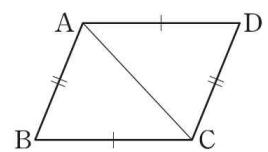
이다. 따라서 ①, ②, ③에서 △ABC ≡ △CDA (SSS 합동)이므로

$\angle BAC=\angle DCA$, $\angle ACB=\angle CAD$

이다. 엇각의 크기가 각각 같으므로

$\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$

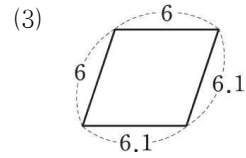
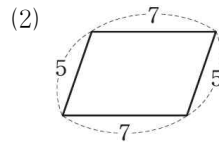
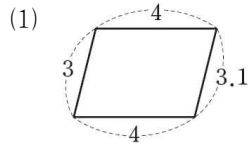
이다. 즉 □ABCD는 평행사변형이다.

따라서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다.

서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 엇각의 크기가 같으면 그 두 직선은 평행하다.

문제 3 다음 사각형 중에서 평행사변형인 것을 찾으시오.

(1)

(2)

(3)

두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다. 이를 설명해 보자.

$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$인 □ABCD에서

사각형의 내각의 크기의 합은 360°이다.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$이므로

$$\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$$

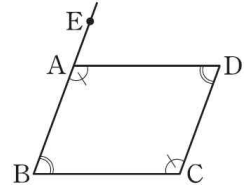
$$\angle A + \angle B = 180° \qquad \cdots\cdots①$$

이다. $\overline{AB}$의 연장선 위에 한 점 E를 잡으면

$$\angle BAD + \angle EAD = 180° \qquad \cdots\cdots②$$

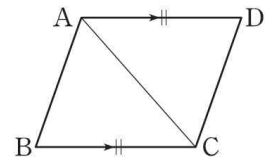
이다. ①, ②에서 $\angle B = \angle EAD$이고 $\angle B$와 $\angle EAD$는 동위각이므로 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이다.

같은 방법으로 하면 $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$이다. 즉 □ABCD는 평행사변형이다.

따라서 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다.

추론

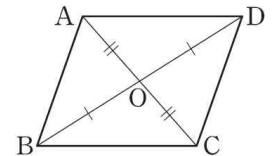
문제 4 오른쪽 사각형 ABCD에서 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$일 때, 다음을 설명하시오.

(1) $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

(2) □ABCD는 평행사변형이다.

추론

문제 5 오른쪽 사각형 ABCD에서 점 O는 두 대각선의 교점이고 $\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OB} = \overline{OD}$일 때, 다음을 설명하시오.

(1) $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$

(2) □ABCD는 평행사변형이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶은 평행사변형의 뜻이다.

평행사변형이 되는 조건

다음 조건 중에서 어느 하나를 만족시키는 사각형은 평행사변형이다.

❶ 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.

❷ 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.

❸ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

❹ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

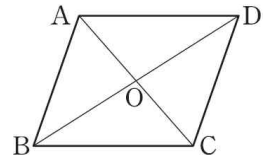
❺ 두 대각선이 서로를 이등분한다.

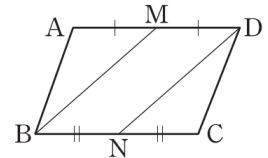
문제 6 다음에서 사각형 ABCD가 평행사변형인 것을 모두 찾으시오. (단, O는 두 대각선의 교점이다.)

(1) $\overline{AB}=\overline{AD}=7\,\text{cm}$, $\overline{BC}=\overline{CD}=9\,\text{cm}$

(2) $\angle BAD=130°$, $\angle ABC=50°$, $\angle BCD=130°$

(3) $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}=8\,\text{cm}$

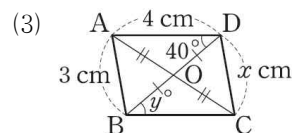
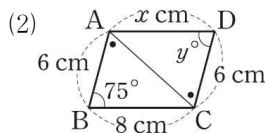
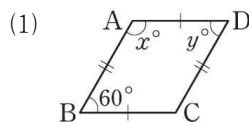
(4) $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

추론

문제 7 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 두 변 AD, BC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, 사각형 MBND는 평행사변형임을 설명하시오.

확인하기

1 다음 그림에서 사각형 ABCD가 평행사변형인 이유를 말하고, x, y의 값을 구하시오. (단, O는 두 대각선의 교점이다.)

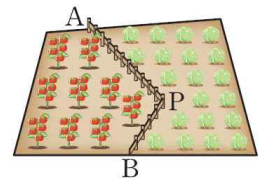
(1)

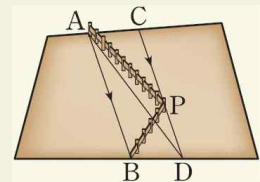
(2)

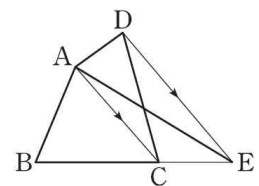
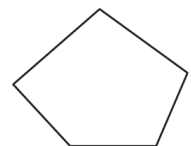
(3) A 4 cm D 40° O 3 cm x cm y° B C

넓이가 같은 도형 만들기

추론 문제 해결

민우네 가족은 오른쪽 그림과 같은 사각형 모양의 텃밭에서 토마토와 양배추를 기르고 있다. 그런데 텃밭의 꺾인 경계선 때문에 채소를 기르기가 불편해서 곧은 경계선으로 바꾸려고 한다.

어떻게 하면 텃밭의 두 부분의 넓이를 변화시키지 않고 A 지점을 지나는 곧은 경계선으로 바꿀 수 있을까?

다음은 민우가 문제를 해결한 과정이다.

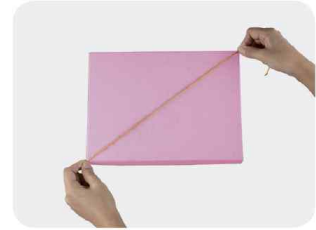
❶ 선분 AB를 그린다.
❷ 점 P를 지나면서 선분 AB에 평행한 선분 CD를 그린다.
❸ 선분 AD를 그리면 삼각형 ABP와 삼각형 ABD의 넓이가 같으므로 선분 AD를 새로운 경계선으로 만든다.

활동 1 위의 과정에서 삼각형 ABP와 삼각형 ABD의 넓이가 같은 이유를 설명해 보자.

활동 2 오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD에서 $\overline{AC}$를 긋고, 점 D를 지나면서 $\overline{AC}$와 평행한 직선이 $\overline{BC}$의 연장선과 만나는 점을 E라고 하자. 이때 사각형 ABCD와 삼각형 ABE의 넓이가 같음을 설명해 보자.

활동 3 오른쪽 오각형과 넓이가 같은 삼각형을 그릴 수 있는 방법을 짝과 토론해 보자.

여러 가지 사각형의 성질

여러 가지 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

직사각형의 성질

우리 주변에는 직사각형 모양의 다양한 물건들이 있다.

탐구 직사각형 모양의 물건을 찾아 두 대각선의 길이를 비교해 보자.

직사각형은 네 각이 모두 직각인 사각형이다. 즉 직사각형은 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같으므로 평행사변형이다.

따라서 직사각형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같고, 두 대각선은 서로를 이등분한다.

위의 생각톡에서 직사각형의 두 대각선의 길이가 같음을 관찰할 수 있다.

직사각형의 두 대각선의 길이가 같음을 설명해 보자.

직사각형 ABCD에서 대각선 AC와 BD를 그으면

△ABC와 △DCB에서

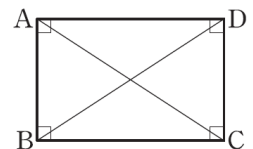
$\overline{AB}=\overline{DC}$ ……①

$\angle ABC=\angle DCB$ ……②

$\overline{BC}$는 공통 ……③

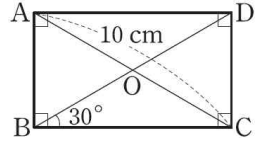
이다. 따라서 ①, ②, ③에서 $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ (SAS 합동)이므로

$\overline{AC}=\overline{DB}$

이다. 즉 직사각형의 두 대각선의 길이는 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

직사각형의 성질

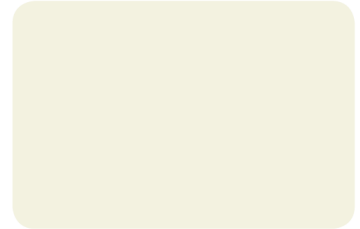
직사각형의 두 대각선은 길이가 같고 서로를 이등분한다.

문제 1 오른쪽 직사각형 ABCD에서 점 O는 두 대각선의 교점이고 $\overline{AC}=10\,\text{cm}$, $\angle DBC=30°$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{BO}$의 길이

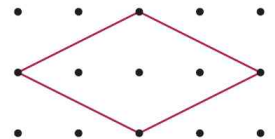
(2) $\angle OAD$의 크기

문제 2 사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 하자. 두 대각선의 길이가 같고 서로를 이등분할 때, 다음에 답하시오.

(1) 주어진 조건을 만족시키는 □ABCD를 오른쪽에 그려 보시오.

(2) △OAB, △OBC와 합동인 삼각형을 각각 찾고, □ABCD는 직사각형임을 설명하시오.

마름모의 성질

오른쪽은 일정한 간격으로 찍힌 점 위에 마름모를 그린 것이다.

탐구 마름모의 두 대각선이 만나서 생기는 네 교각의 크기를 비교해 보자.

마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이다. 즉 마름모는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이다.

따라서 마름모의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같고, 두 대각선은 서로를 이등분한다.

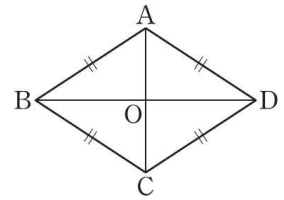
위의 생각톡에서 마름모의 두 대각선은 서로 수직임을 관찰할 수 있다.

마름모의 두 대각선은 서로 수직임을 설명해 보자.

마름모 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라고 하면 $\triangle$AOB와 $\triangle$AOD에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$ ……①

$\overline{OB}=\overline{OD}$ ……②

$\overline{AO}$는 공통 ……③

이다. 따라서 ①, ②, ③에서 $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$ (SSS 합동)이므로

$\angle AOB = \angle AOD$

이다. 그런데 $\angle AOB + \angle AOD = 180°$에서 $\angle AOB = \angle AOD = 90°$이므로

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

이다. 즉 마름모의 두 대각선은 서로 수직이다.

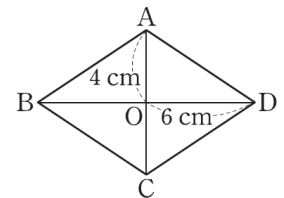
이상을 정리하면 다음과 같다.

마름모의 성질

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

문제 3 오른쪽 마름모 ABCD에서 점 O는 두 대각선의 교점이고 $\overline{AO}=4\,\text{cm}$, $\overline{OD}=6\,\text{cm}$일 때, 다음을 구하시오.

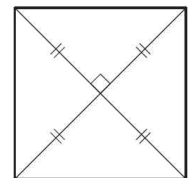
(1) $\overline{OC}$의 길이

(2) 마름모 ABCD의 넓이

추론

문제 4 두 대각선이 서로를 수직이등분하는 사각형은 마름모이다. 그 이유를 설명하시오.

정사각형의 성질

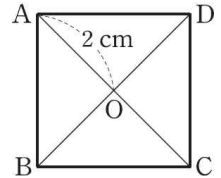
정사각형은 네 내각의 크기가 모두 같고 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이므로 정사각형은 직사각형이면서 마름모이다.

따라서 정사각형의 두 대각선은 길이가 같고 서로를 수직이등분한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **정사각형의 성질**
> 정사각형의 두 대각선은 길이가 같고 서로를 수직이등분한다.

문제 5 오른쪽 정사각형 ABCD에서 점 O는 두 대각선의 교점이고 $\overline{AO}=2\,cm$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{BD}$의 길이

(2) $\angle DOC$의 크기

추론

문제 6 두 대각선의 길이가 같고 서로를 수직이등분하는 사각형은 정사각형이다. 그 이유를 설명하시오.

사다리꼴의 성질

등변사다리꼴

사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이다. 특히 사다리꼴 중에서 아랫변의 양 끝 각의 크기가 같은 사다리꼴을 등변사다리꼴이라고 한다.

예제 1 등변사다리꼴에서 평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이가 같다. 그 이유를 설명하시오.

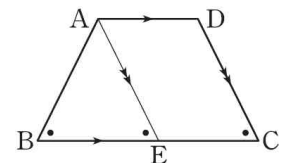
풀이 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$, $\angle B=\angle C$라고 하자.
점 A를 지나고 $\overline{DC}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E라고 하면 $\angle C=\angle AEB$

(동위각)이고 $\angle B=\angle C$이므로 $\angle B=\angle AEB$
따라서 $\triangle ABE$는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AB}=\overline{AE} \quad \cdots\cdots ①$$

또 □AECD는 평행사변형이므로

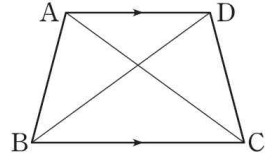
$$\overline{AE}=\overline{DC} \quad \cdots\cdots ②$$

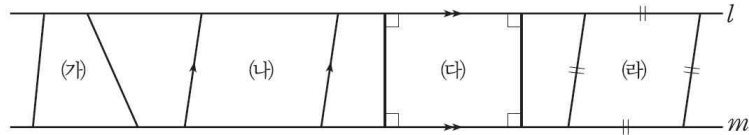
따라서 ①, ②에서 $\overline{AB}=\overline{DC}$이다.
즉 등변사다리꼴에서 평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이는 같다.

답 풀이 참조

추론

문제 7 오른쪽 사각형 ABCD는 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$인 등변사다리꼴이다. 다음을 설명하시오.

(1) $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$

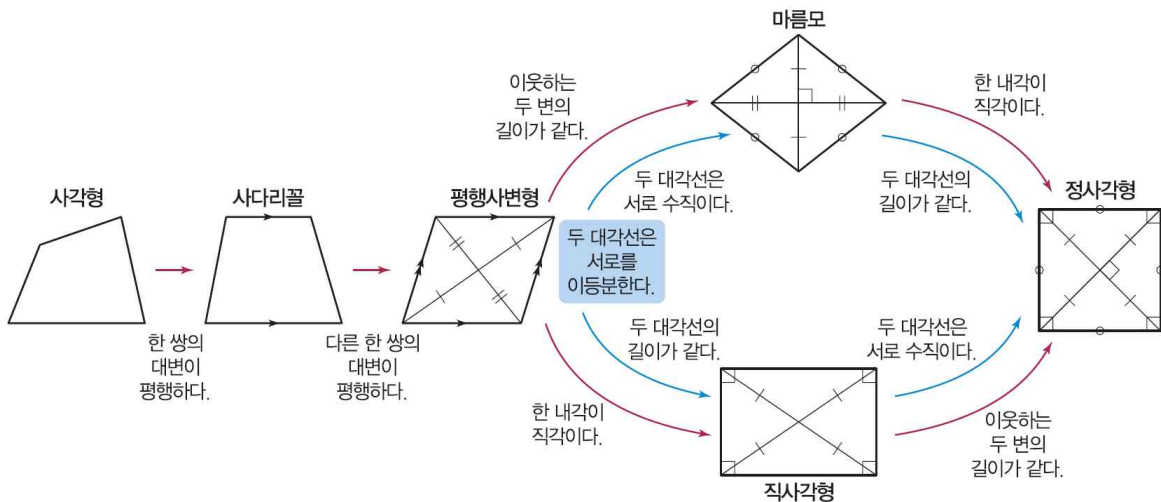
(2) 두 대각선의 길이는 같다.

여러 가지 사각형 사이의 관계

다음은 평행한 두 직선 l, m을 이용하여 여러 가지 사각형을 그린 것이다.

탐구 ① 사다리꼴인 것을 모두 말해 보자.

탐구 ② 평행사변형인 것을 모두 말해 보자.

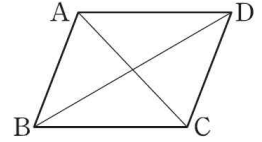
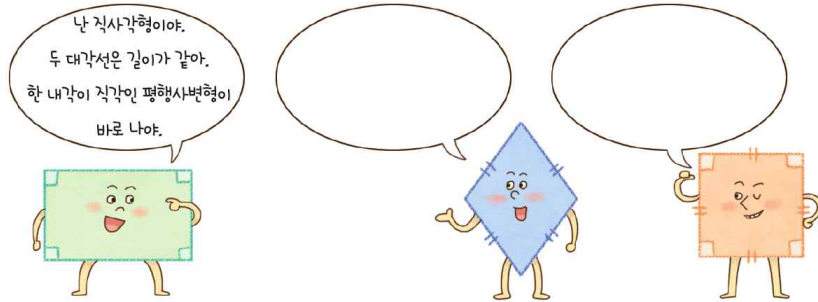
탐구 ③ 평행사변형인 것은 모두 사다리꼴인지 말해 보자.

직사각형과 마름모는 평행사변형의 성질을 가지고 있고, 정사각형은 직사각형과 마름모의 성질을 동시에 가지고 있다.

여러 가지 사각형 사이의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

문제 8 오른쪽 평행사변형 ABCD가 다음 조건을 각각 만족시킬 때, 어떤 사각형이 되는지 말하시오.

(1) $\angle ABC = 90°$ (2) $\overline{AB} = \overline{BC}$

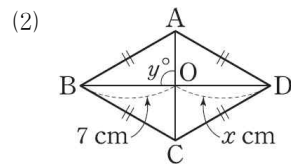
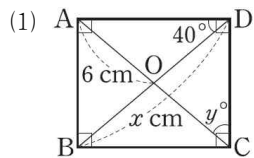
(3) $\overline{AC} = \overline{BD}$ (4) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

(5) $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

설명하기 직사각형이 자기 소개를 하고 있다. 직사각형처럼 마름모와 정사각형을 소개해 보자.

확인하기

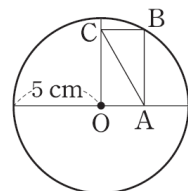
1 다음 사각형 ABCD에서 x, y의 값을 구하시오.

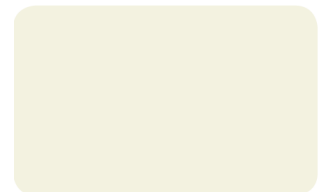
(단, O는 두 대각선의 교점이다.)

(1)

(2)

사고력+ 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 5 cm인 원 O 위의 한 점 B를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC를 만들었을 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하시오.

틀린 말을 찾아라

추론 의사소통

다음은 여러 가지 사각형의 대각선의 성질에 대한 대화이다.

활동 1 도란이의 말은 틀린 말이다. 틀린 이유를 오른쪽에 그림을 그려 설명해 보자.

활동 2 위에서 틀린 말을 하나 더 찾아 쓰고 그 이유를 오른쪽에 그림을 그려 설명해 보자.

정답 및 풀이 293쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 평행사변형의 성질 165쪽

(1) 평행사변형의 성질

① 두 쌍의 ( )의 길이는 각각 같다.

② 두 쌍의 ( )의 크기는 각각 같다.

③ 두 대각선은 서로를 ( ) 한다.

(2) 평행사변형이 되는 조건

다음 조건 중에서 어느 하나를 만족시키는 사각형은 평행사변형이다.

① 두 쌍의 대변이 각각 ( )하다. (평행사변형의 뜻)

② 두 쌍의 ( )의 길이가 각각 같다.

③ 두 쌍의 ( )의 크기가 각각 같다.

④ 한 쌍의 대변이 ( )하고 그 ( )가 같다.

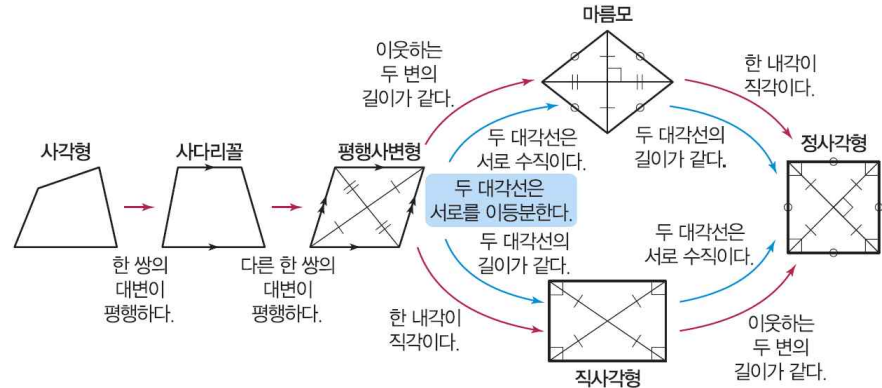
⑤ 두 대각선이 서로를 ( )한다.

❷ 여러 가지 사각형의 성질 171쪽

(1) 직사각형의 두 대각선은 ( )가 같고 서로를 ( )한다.

(2) 마름모의 두 대각선은 서로를 ( )한다.

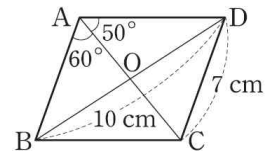
(3) 정사각형의 두 대각선은 ( )가 같고 서로를 ( )한다.

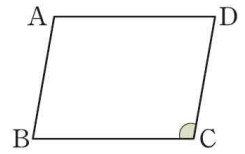
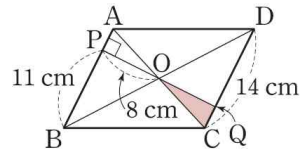
❸ 여러 가지 사각형 사이의 관계 175쪽

표준 문제

01 오른쪽 평행사변형 ABCD에 대한 설명으로 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오. (단, O는 두 대각선의 교점이다.)

보기

(ㄱ) $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$　　(ㄴ) $\overline{CO} = 5\,\text{cm}$

(ㄷ) $\angle BCD = 110°$　　(ㄹ) $\angle AOB = 90°$

02 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 $\angle A : \angle B = 5 : 4$일 때, $\angle C$의 크기를 구하시오.

서술형

03 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라 하고 점 O를 지나는 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. $\angle APO = 90°$이고 $\overline{PO} = 8\,cm$, $\overline{PB} = 11\,cm$, $\overline{CD} = 14\,cm$일 때, 삼각형 OCQ의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론

04 사각형 ABCD가 평행사변형이 되는 경우를 보기에서 모두 고르시오.

(단, O는 두 대각선의 교점이다.)

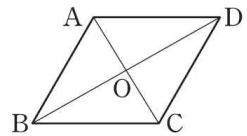
보기

(ㄱ) $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

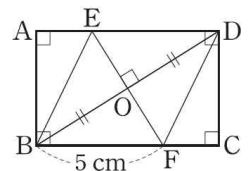
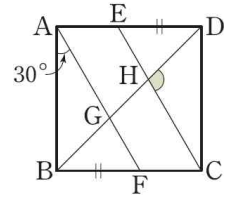
(ㄴ) $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ACB = \angle DAC$

(ㄷ) $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\angle ABC + \angle BAD = 180°$

(ㄹ) $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\angle OAB = \angle OBA$

서술형

05 오른쪽 직사각형 ABCD에서 대각선 BD의 수직이등분선이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 E, F라고 하자. $\overline{BF} = 5\,cm$일 때, 다음에 답하시오. (단, O는 $\overline{BD}$와 $\overline{EF}$의 교점이다.)

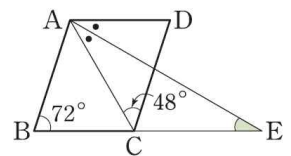
(1) □EBFD는 어떤 사각형인지 말하고 그 이유를 설명하시오.

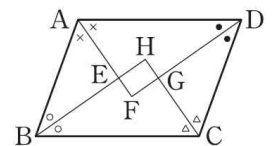
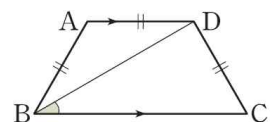
(2) □EBFD의 둘레의 길이를 구하시오.

06 오른쪽 정사각형 ABCD에서 $\overline{BF}=\overline{ED}$이고 두 점 G, H는 각각 대각선 BD와 $\overline{AF}$, $\overline{EC}$의 교점이다. $\angle BAF=30°$일 때, $\angle DHC$의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

07 다음에 해당되는 사각형을 **보기**에서 모두 찾으시오.

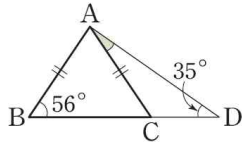
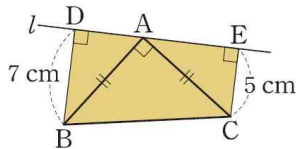
(ㄱ) 사다리꼴 (ㄴ) 평행사변형 (ㄷ) 직사각형 (ㄹ) 마름모 (ㅁ) 정사각형

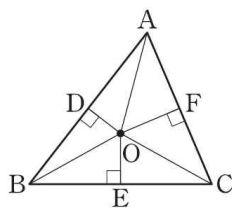
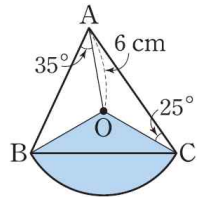
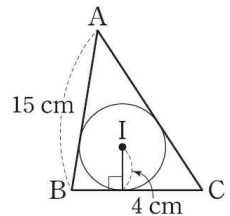
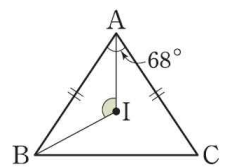
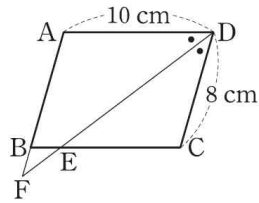
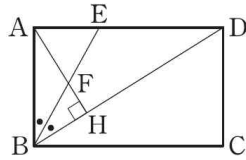
(1) 두 대각선이 서로를 이등분하는 사각형
(2) 두 대각선의 길이가 같은 사각형
(3) 두 대각선이 수직인 사각형

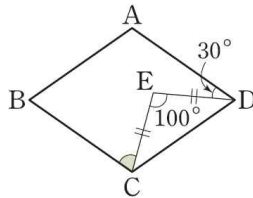
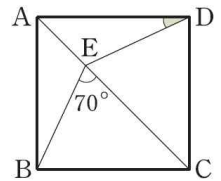
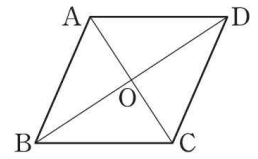
도전 문제

08 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 $\angle CAD$의 이등분선과 $\overline{BC}$의 연장선이 만나는 점을 E라고 하자. $\angle B=72°$, $\angle ACD=48°$일 때, $\angle E$의 크기를 구하시오.

추론

09 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 네 내각의 이등분선의 교점을 각각 E, F, G, H라고 할 때, □EFGH는 어떤 사각형인지 말하고 그 이유를 설명하시오.

10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{BC}$일 때, $\angle DBC$의 크기를 구하시오.

정답 및 풀이 294쪽

01 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle B=56°$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$의 연장선 위에 $\angle ADC=35°$가 되도록 점 D를 잡을 때, $\angle CAD$의 크기를 구하시오.

02 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나는 직선 l을 긋고, 꼭짓점 B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자. $\overline{DB}=7\,\text{cm}$, $\overline{EC}=5\,\text{cm}$일 때, □DBCE의 넓이를 구하시오.

03 오른쪽 그림에서 점 O가 삼각형 ABC의 외심일 때, 다음에서 옳지 않은 것은?

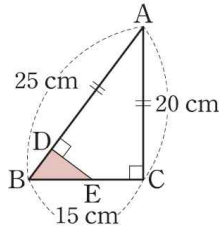
① $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$
② $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$
③ $\angle OAD=\angle OBD$
④ $\overline{AF}=\overline{CF}$
⑤ $\triangle OBE\equiv\triangle OCE$

04 오른쪽 그림에서 점 O는 삼각형 ABC의 외심이다. $\angle OAB=35°$, $\angle OCA=25°$이고 $\overline{AO}=6\,\text{cm}$일 때, 부채꼴 BOC의 넓이를 구하시오.

05 오른쪽 삼각형 ABC에서 내접원 I의 반지름의 길이는 $4\,\text{cm}$이고 $\overline{AB}=15\,\text{cm}$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $90\,\text{cm}^2$일 때, $\overline{BC}+\overline{CA}$의 값을 구하시오.

06 오른쪽 그림에서 점 I는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 내심이고 $\angle BAC=68°$일 때, $\angle AIB$의 크기를 구하시오.

07 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 ∠D의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E, $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점을 F라고 하자.
$\overline{AD}=10\,cm$, $\overline{DC}=8\,cm$일 때, $\overline{BF}$의 길이를 구하시오.

08 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하고, ∠ABD의 이등분선이 $\overline{AD}$, $\overline{AH}$와 만나는 점을 각각 E, F라고 하자. 이때 $\overline{AF}$와 길이가 같은 선분은?

① $\overline{AE}$　② $\overline{BF}$　③ $\overline{BH}$
④ $\overline{EF}$　⑤ $\overline{FH}$

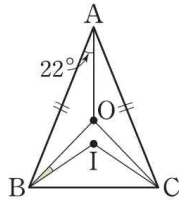
09 오른쪽 마름모 ABCD에서 내부의 한 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\overline{ED}$이고 ∠CED $=100°$, ∠EDA $=30°$일 때, ∠BCE의 크기를 구하시오.

10 오른쪽 정사각형 ABCD에서 $\overline{AC}$는 대각선이고 ∠BEC $=70°$일 때, ∠ADE의 크기를 구하시오.

11 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 점 O는 두 대각선의 교점이고 $\overline{AB}=\overline{AD}$일 때, 다음에서 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\overline{AC}=\overline{BD}$　② $\overline{OA}=\overline{OB}$
③ $\overline{OA}=\overline{OC}$　④ ∠ABC = ∠BCD
⑤ ∠AOB = ∠AOD

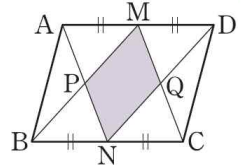
12 다음에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 마름모는 평행사변형이다.
② 한 내각의 크기가 90°인 평행사변형은 직사각형이다.
③ 이웃하는 두 변의 길이가 같은 평행사변형은 마름모이다.
④ 두 대각선의 길이가 같은 사다리꼴은 직사각형이다.
⑤ 두 대각선이 수직으로 만나는 직사각형은 정사각형이다.

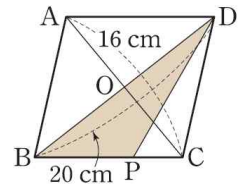
서술형

13 오른쪽 그림과 같이 $\angle C = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 빗변 AB 위에 $\overline{AC} = \overline{AD}$가 되도록 점 D를 잡고, 점 D를 지나면서 $\overline{AB}$에 수직인 직선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 E라고 하자. $\overline{AB} = 25\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 15\,\text{cm}$, $\overline{CA} = 20\,\text{cm}$일 때, 삼각형 DBE의 둘레의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

14 오른쪽 그림에서 두 점 O, I는 각각 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 외심과 내심이다. $\angle OAB = 22°$일 때, $\angle OBI$의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 중점을 각각 M, N이라고 하자. 사각형 ABCD의 넓이가 $40\,\text{cm}^2$일 때, 사각형 MPNQ의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 오른쪽 마름모 ABCD에서 $\overline{AC} = 16\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 20\,\text{cm}$이고, $\overline{BC}$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP} : \overline{PC} = 3 : 2$일 때, 삼각형 DBP의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 이등변삼각형의 성질을 알 수 있다.			
❷ 직각삼각형의 합동 조건을 알 수 있다.			
❸ 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.			
❹ 평행사변형의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.			
❺ 여러 가지 사각형의 성질을 이해하고 사각형 사이의 관계를 알 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

나만의 엠블럼 만들기

엠블럼(emblem)은 기업, 단체 등의 상징으로, 그 대상을 대표하는 의미나 가치를 잘 나타낼 수 있도록 다양한 모양과 도형을 사용하여 만든다.

오른쪽은 ‘2018년 평창 동계올림픽’을 상징하는 공식 엠블럼이다. 이 엠블럼에 쓰인 ㅍ과 ㅊ은 평창의 각 글자의 초성인 ‘ㅍ’과 ‘ㅊ’을 도형화한 것으로 ‘ㅍ’은 하늘과 땅 그리고 사람들의 어울림을 의미하고 ‘ㅊ’은 눈과 얼음 그리고 동계 스포츠 선수를 의미한다고 한다. 또 5개의 원을 고리처럼 연결하여 만든 올림픽 엠블럼은 건전한 경쟁을 하는 전 세계인의 화합을 의미한다고 한다.

(출처: 2018 평창 동계올림픽대회 및 동계패럴림픽, 2017)

이외에도 다음과 같이 여러 가지 도형으로 만든 엠블럼을 볼 수 있다.

제98회 전국체육대회

2022 FIFA 카타르 월드컵

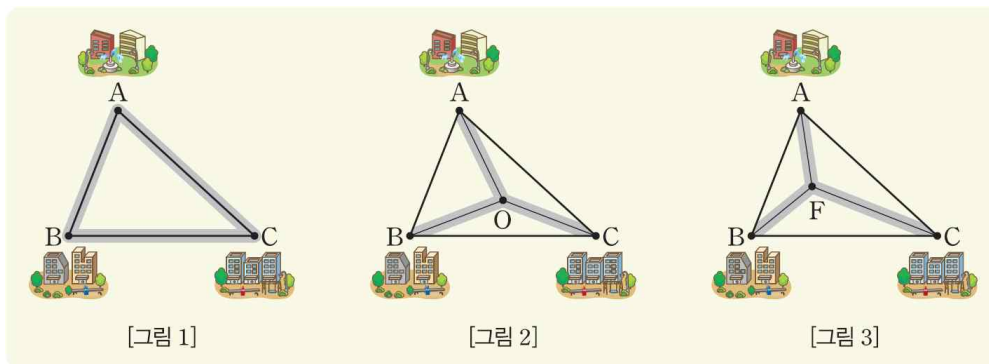
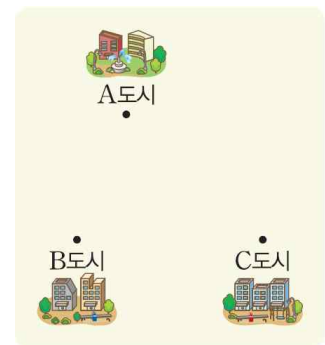
과제 1 여러 가지 도형을 이용하여 나만의 엠블럼을 만들어 발표해 보자.

도시를 연결하는 가장 경제적인 도로

여러 도시를 연결하는 도로를 건설할 때에는 도로의 길이를 가장 짧게 하는 것이 경제적이다. 오른쪽 그림과 같은 A, B, C 세 도시를 연결하는 가장 짧은 도로는 어떻게 설계할 수 있을까?

세 도시가 삼각형의 꼭짓점 A, B, C에 각각 위치한다고 하고 다음과 같이 A, B, C를 연결하는 도로를 세 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

[그림 1]은 삼각형 ABC의 세 변을 따라 도로를 만든 것이고, [그림 2]는 삼각형 ABC의 외심 O에서 각 꼭짓점 A, B, C를 연결하여 도로를 만든 것이다. [그림 3]은 두 도로가 이루는 각의 크기가 모두 $120°$가 되도록 삼각형 ABC 내부의 점 F에서 각 꼭짓점 A, B, C를 연결하여 도로를 만든 것이다. 실제로 길이를 재어 보면 [그림 3]의 도로의 길이가 가장 짧음을 알 수 있다.

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

[그림 3]과 같이 각 꼭짓점으로부터의 거리의 합이 최소가 되는 점을 페르마 점(Fermat point)이라고 한다.

페르마 점은 산업의 여러 분야에서도 유용하게 사용되고 있다. 예를 들어 송유관을 건설할 때나 광케이블망을 건설할 때, 비용을 절감하기 위해 연결로의 길이를 최소로 해야 하므로 페르마 점을 이용한다.

(출처: C. Alsina and R. B. Nelsen, 『Math Made Visual』, 수학사랑, 2017)

진로 탐색

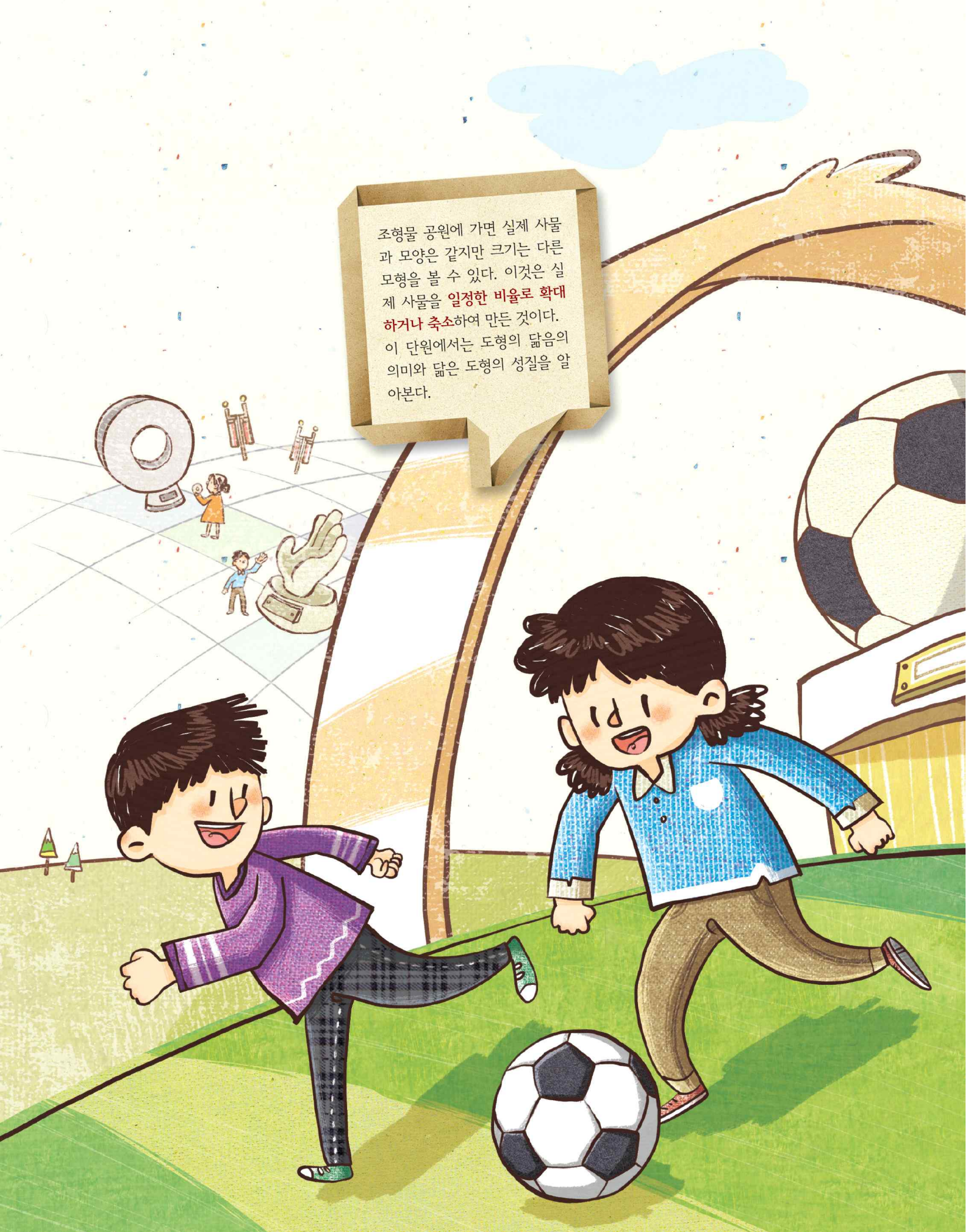
도시 공학자 | 도시를 공학적으로 분석하고 신도시 건설 여부, 도시 계획의 작성 및 실시, 도시 문제의 해결 등을 연구한다.

VI
도형의 닮음
배운 내용
이 단원의 내용
배울 내용
초 5~6
• 비례식
• 합동과 대칭
중 수학 1
• 평행선의 성질
• 작도와 합동
• 입체도형의 겉넓이와 부피
중 수학 2
• 삼각형의 성질
• 사각형의 성질
1 도형의 닮음
• 도형의 닮음
• 삼각형의 닮음 조건
2 닮음의 응용
• 평행선 사이의 선분의 길이의 비
• 삼각형의 무게중심
• 닮은 도형의 넓이와 부피
중 수학 2
• 피타고라스 정리
중 수학 3
• 삼각비
• 원의 성질
고 수학
• 평행이동
• 대칭이동
• 도형의 방정식

조형물 공원에 가면 실제 사물과 모양은 같지만 크기는 다른 모형을 볼 수 있다. 이것은 실제 사물을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 만든 것이다.
이 단원에서는 도형의 닮음의 의미와 닮은 도형의 성질을 알아본다.

1 도형의 닮음

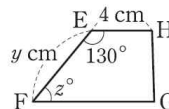
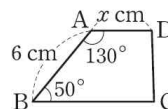
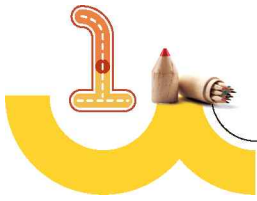
준비 학습

비례식

❶ 다음 비례식을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

(1) $2:3=10:x$

(2) $x:5=6:\frac{5}{2}$

도형의 합동

❷ 오른쪽 그림에서 두 사각형 ABCD와 EFGH는 합동일 때, x, y, z의 값을 구하시오.

도형의 닮음

도형의 닮음의 의미와 닮은 도형의 성질을 이해한다.

닮음과 닮은 도형

오른쪽 [사진 2]는 [사진 1]을 2배로 확대한 것이다.

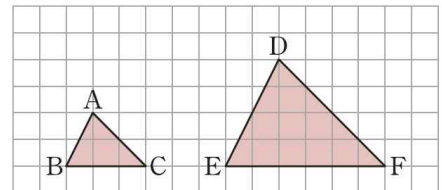
탐구 ① [사진 1]과 [사진 2]의 같은 점을 말해 보자.

탐구 ② [사진 1]과 [사진 2]의 다른 점을 말해 보자.

[사진 1] [사진 2]

위의 생각톡에서 [사진 1]의 가로와 세로의 길이를 각각 2배로 확대하면 [사진 2]와 합동이다.

이와 같이 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 **닮음**인 관계에 있다고 한다. 또 닮음인 관계에 있는 두 도형을 닮은 도형이라고 한다. 즉 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형은 처음 도형과 닮은 도형이다.

오른쪽 그림에서 삼각형 DEF는 삼각형 ABC를 2배로 확대한 것이므로 두 삼각형 ABC와 DEF는 닮은 도형이다.

이때 닮은 두 삼각형 ABC와 DEF에서

꼭짓점 A와 꼭짓점 D를 대응하는 꼭짓점,
변 AB와 변 DE를 대응하는 변,
$\angle A$와 $\angle D$를 대응하는 각

이라고 한다.

기호 ∽는 라틴어 Similis(영어 similarity)의 첫 글자 S를 변형하여 만든 것으로 알려져 있다.

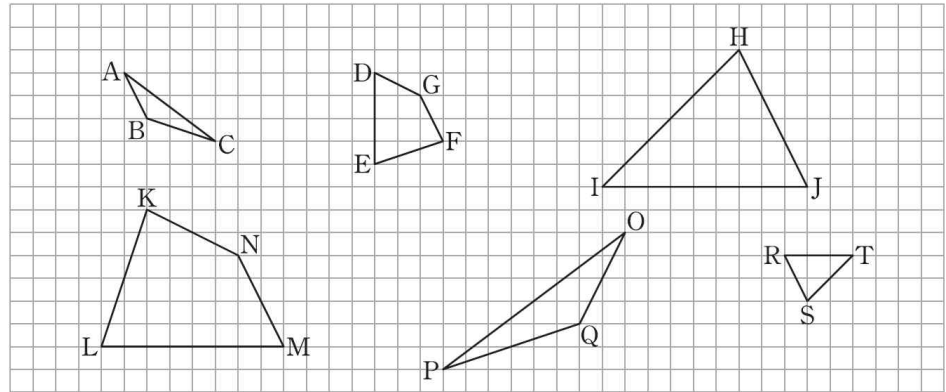
두 삼각형 ABC와 DEF가 닮은 도형일 때, 기호 ∽를 사용하여

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

와 같이 나타낸다. 이때 두 도형의 꼭짓점은 대응하는 순서대로 쓴다.

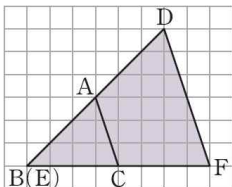
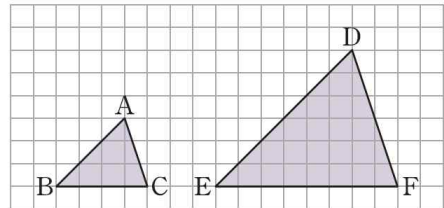
문제 1 다음에서 두 도형이 항상 닮은 도형인 것을 모두 고르시오.

두 이등변삼각형	두 정사각형	두 원
두 부채꼴	두 직사각형	두 직각삼각형

문제 2 다음 그림에서 닮은 도형을 찾아 기호 ∽를 사용하여 나타내시오.

닮은 도형의 성질

오른쪽 그림에서 삼각형 DEF는 삼각형 ABC를 2배로 확대하여 그린 것이다.

탐구 ① 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비를 각각 구해 보자.

탐구 ② 세 쌍의 대응하는 각의 크기를 각각 비교해 보자.

위의 생각톡에서 △ABC∽△DEF이다. 이때 두 삼각형에서 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비는

$$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AC}:\overline{DF}=1:2$$

로 일정함을 알 수 있다.

또 두 삼각형에서 세 쌍의 대응하는 각의 크기를 각각 비교하면

$$\angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 닮은 두 평면도형에는 다음과 같은 성질이 있다.

평면도형에서 닮음의 성질

닮은 두 평면도형에서

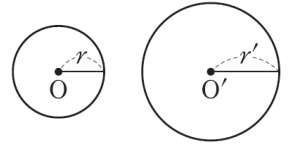
❶ 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다.

❷ 대응하는 각의 크기는 각각 같다.

합동인 두 도형은 닮음비가 1 : 1인 닮은 도형으로 생각할 수 있다.

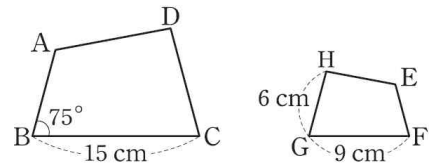
닮은 두 평면도형에서 대응하는 변의 길이의 비를 **닮음비**라고 한다.

예를 들어 앞의 생각톡에서 닮은 두 삼각형 ABC와 DEF의 대응하는 변의 길이의 비가 1 : 2이므로 두 삼각형의 닮음비는 1 : 2이다.

참고 두 원은 항상 닮은 도형이고, 닮음비는 두 원의 반지름의 길이의 비이다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같은 두 원 O, O′의 닮음비는 $r : r'$이다.

예제 1 오른쪽 그림에서 □ABCD ∽ □EFGH일 때, 다음을 구하시오.

(1) □ABCD와 □EFGH의 닮음비

(2) $\overline{CD}$의 길이

(3) ∠F의 크기

풀이 (1) $\overline{BC}$와 $\overline{FG}$가 대응하는 변이고, $\overline{BC} = 15$ cm, $\overline{FG} = 9$ cm이므로

$\overline{BC} : \overline{FG} = 15 : 9 = 5 : 3$

따라서 닮음비는 5 : 3이다.

(2) 닮음비가 5 : 3이고, $\overline{CD}$와 $\overline{GH}$가 대응하는 변이므로

$\overline{CD} : 6 = 5 : 3$, $\quad 3\overline{CD} = 30$

$\overline{CD} = 10$ (cm)

(3) ∠F와 ∠B가 대응하는 각이므로

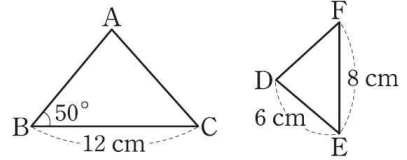
$\angle F = \angle B = 75°$

답 (1) 5 : 3 (2) 10 cm (3) 75°

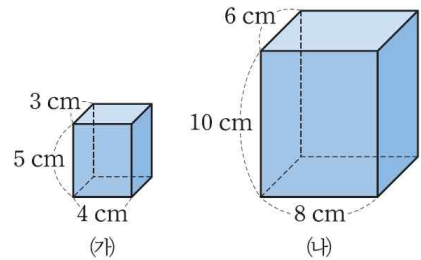
문제 3 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비

(2) $\overline{AB}$의 길이

(3) $\angle E$의 크기

입체도형에서 닮음을 알아보자.

평면도형에서와 마찬가지로 한 입체도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 입체도형과 모양과 크기가 같을 때, 이 두 입체도형은 닮음인 관계에 있다고 한다. 또 닮음인 관계에 있는 두 입체도형을 닮은 도형이라고 한다.

오른쪽 그림에서 직육면체 (나)는 직육면체 (가)의 각 모서리의 길이를 2배로 확대한 것이다. 따라서 두 직육면체 (가)와 (나)는 닮은 도형이고, 대응하는 모서리의 길이의 비는 $1:2$로 일정하다. 이때 대응하는 두 면은 닮은 도형이다.

일반적으로 닮은 두 입체도형에는 다음과 같은 성질이 있다.

입체도형에서 닮음의 성질

닮은 두 입체도형에서

❶ 대응하는 모서리의 길이의 비는 일정하다.

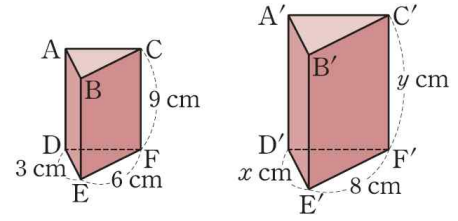
❷ 대응하는 면은 닮은 도형이다.

닮은 두 입체도형에서 대응하는 모서리의 길이의 비를 닮음비라고 한다.

예를 들어 위의 닮은 두 직육면체 (가)와 (나)의 대응하는 모서리의 길이의 비가 $1:2$이므로 두 직육면체의 닮음비는 $1:2$이다.

문제 4 오른쪽 그림에서 두 삼각기둥은 닮은 도형이다. 면 ABC에 대응하는 면이 면 A′B′C′일 때, 다음을 구하시오.

(1) 두 삼각기둥의 닮음비

(2) x, y의 값

의사소통

문제 5 다음 두 사람의 대화에서 잘못 말하고 있는 사람과 그 이유를 말하시오.

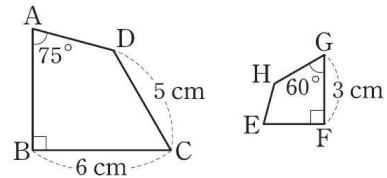
찾아보기 건축 모형, 비행기 모형과 같이 우리 주변에서 닮음인 관계에 있는 예를 찾아보자.

확인하기

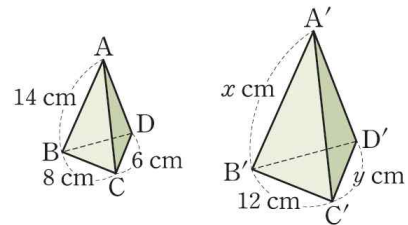
1 오른쪽 그림에서 □ABCD ∽ □EFGH일 때, 다음을 구하시오.

(1) □ABCD와 □EFGH의 닮음비

(2) $\overline{\mathrm{GH}}$의 길이

(3) ∠D의 크기

2 오른쪽 그림에서 두 삼각뿔은 닮은 도형이고 면 ABC에 대응하는 면이 면 A′B′C′일 때, 다음을 구하시오.

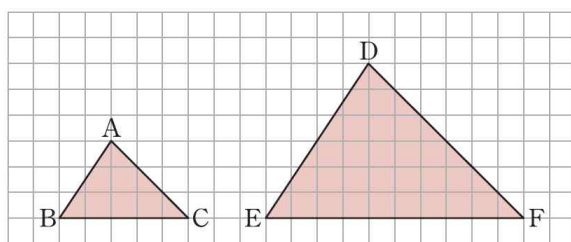
(1) 두 삼각뿔 ABCD와 A′B′C′D′의 닮음비

(2) x, y의 값

사고력+ 두 구와 같이 항상 닮은 입체도형을 말하시오.

삼각형의 닮음 조건

삼각형의 닮음 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 닮음인지 판별할 수 있다.

삼각형의 닮음 조건

다음 그림과 같이 두 삼각형 ABC와 DEF가 있다.

탐구 ① $\overline{AB}:\overline{DE}$, $\overline{BC}:\overline{EF}$, $\overline{AC}:\overline{DF}$를 구하여 그 비를 비교해 보자.

탐구 ② $\angle A$와 $\angle D$, $\angle B$와 $\angle E$, $\angle C$와 $\angle F$의 크기를 각각 비교해 보자.

위의 생각톡의 두 삼각형 ABC와 DEF는 대응하는 변의 길이의 비가 모두 같고 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로 닮음임을 알 수 있다.

그러나 두 삼각형에서 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비와 세 쌍의 대응하는 각의 크기를 모두 비교하지 않아도 두 삼각형이 닮음인지 확인할 수 있다.

두 삼각형의 변의 길이와 각의 크기 사이에 어떤 조건이 있으면 두 삼각형이 닮은 도형인지 알아보자.

두 삼각형 ABC와 DEF에서 다음 세 가지 경우를 생각해 보자.

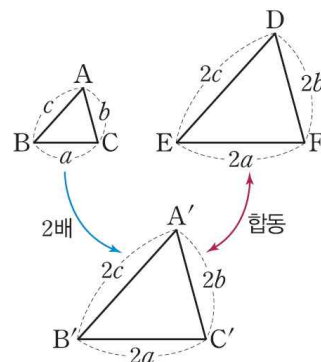
1 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AC}:\overline{DF}=1:2$

라고 하자.

$\triangle ABC$를 2배로 확대한 도형을 $\triangle A'B'C'$이라고 하면

$\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ (SSS 합동)

이다. 따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이다.

2 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=1:2$, $\angle B=\angle E$

라고 하자.

$\triangle ABC$를 2배로 확대한 도형을 $\triangle A'B'C'$이라고 하면

$\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ (SAS 합동)

이다. 따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이다.

3 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

두 삼각형에서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으면 세 쌍의 대응하는 각의 크기가 모두 같게 되어 모양이 같아지므로 두 삼각형은 닮은 도형이다.

$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$라고 하자.

$\overline{BC}:\overline{EF}=1:2$일 때, $\triangle ABC$를 2배로 확대한 도형을 $\triangle A'B'C'$이라고 하면

$\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ (ASA 합동)

이다. 따라서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이다.

일반적으로 두 삼각형이 다음 세 조건 중 하나를 만족시킬 때, 두 삼각형은 닮은 도형이다. 이것을 삼각형의 닮음 조건이라고 한다.

삼각형의 합동 조건

두 삼각형은 다음 각 경우에 서로 합동이다.

❶ 세 쌍의 대응하는 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS 합동)

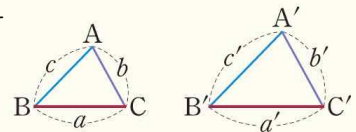
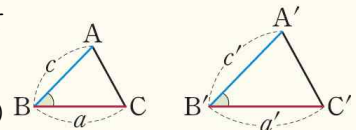
❷ 두 쌍의 대응하는 변의 길이가 각각 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)

❸ 한 쌍의 대응하는 변의 길이가 같고 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 (ASA 합동)

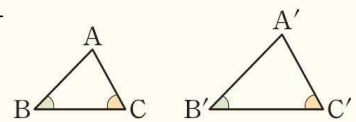
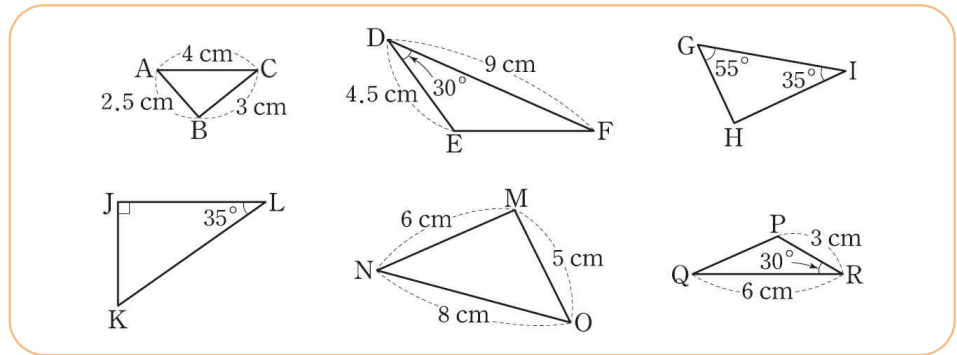
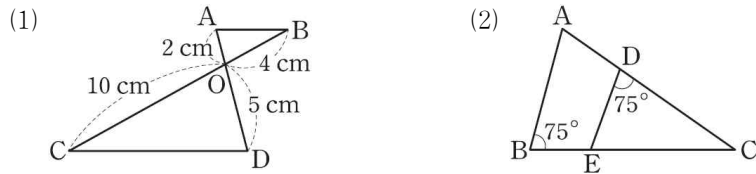
삼각형의 닮음 조건

두 삼각형은 다음 각 경우에 닮은 도형이다.

❶ 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때 (SSS 닮음)

$a:a'=b:b'=c:c'$

❷ 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 닮음)

$a:a'=c:c'$, $\angle B=\angle B'$

❸ 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때 (AA 닮음)

$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

문제 1 다음 그림에서 닮은 삼각형을 찾아 기호 ∽를 사용하여 나타내고 각각의 닮음 조건을 말하시오.

문제 2 다음 그림에서 닮은 삼각형을 찾아 기호 ∽를 사용하여 나타내고 그 닮음 조건을 말하시오.

(1)
(2)
예제 1 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\angle B = \angle CAD$이고 $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$, $\overline{DC} = 4\,\text{cm}$일 때, $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.

풀이 △ABC와 △DAC에서

$\angle B = \angle CAD$, $\angle C$는 공통

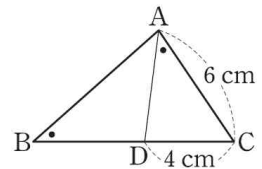
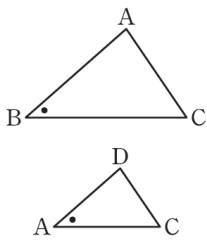
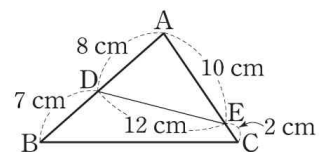
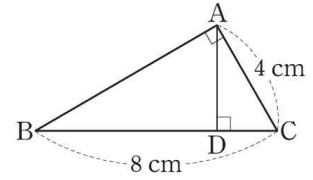
즉 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

△ABC∽△DAC

$\overline{AC} : \overline{DC} = \overline{BC} : \overline{AC}$이므로

$6 : 4 = \overline{BC} : 6$, $4\overline{BC} = 36$, $\overline{BC} = 9(\text{cm})$

따라서 $\overline{BD}$의 길이는 $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC} = 9 - 4 = 5(\text{cm})$

답 5 cm

문제 3 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 7\,\text{cm}$, $\overline{AE} = 10\,\text{cm}$, $\overline{CE} = 2\,\text{cm}$, $\overline{DE} = 12\,\text{cm}$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하시오.

예제 2 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AC}=4\text{ cm}$, $\overline{BC}=8\text{ cm}$일 때, 다음에 답하시오.

풀이 (1) $\triangle ABC \backsim \triangle DAC$에서

$\angle BAC=\angle ADC=90°$, $\angle C$는 공통

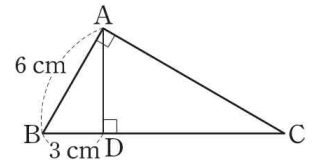
즉 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$

(2) $\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{DC}$이므로

$8:4=4:\overline{DC}$, $8\overline{DC}=16$, $\overline{DC}=2(\text{cm})$

답 풀이 참조

문제 4 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AB}=6\text{ cm}$, $\overline{BD}=3\text{ cm}$일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하시오.

설명하기

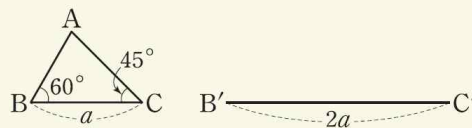
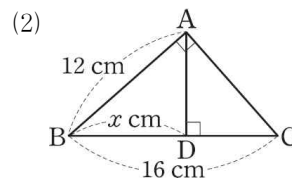
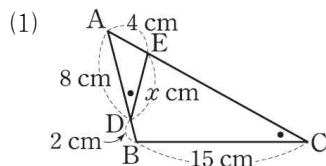
$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$이 되도록 삼각형 $A'B'C'$을 완성하고 그 방법을 설명해 보자.

확인하기

1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

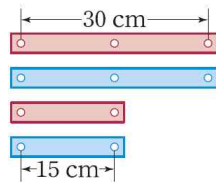
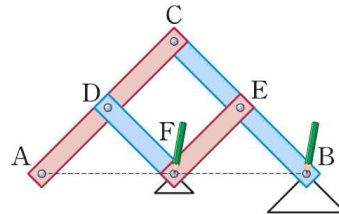
정보 처리 추론

여러 가지 도구를 이용하여 닮은 도형 그리기

여러 가지 도구를 이용하여 닮은 도형을 그리는 방법을 알아보자.

1 팬터그래프(pantagraph) 이용하기

팬터그래프는 도형을 확대하거나 축소하여 그릴 수 있는 도구이다. 다음은 팬터그래프를 만들어 닮은 도형을 그리는 과정이다.

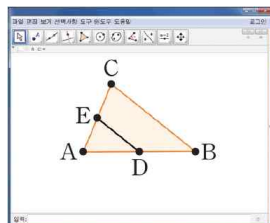
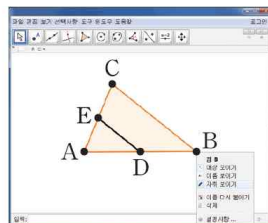
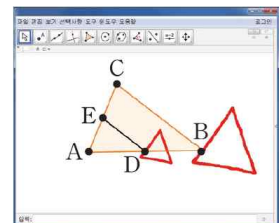
❶ [그림 1]과 같이 4개의 종이띠에 15 cm 간격으로 구멍을 뚫고 적당한 길이로 자른다.

❷ 잘라 낸 종이띠를 [그림 2]와 같이 2개씩 평행하게 연결하고 점 A를 고정한다.

❸ 점 B와 점 F에 연필을 끼운 후 점 B에 끼워진 연필로 그림을 그리면 점 F에 끼워진 연필은 점 B에서 그리는 그림의 $\frac{1}{2}$배로 축소된 그림을 그리게 된다.

[그림 1] [그림 2]

2 컴퓨터 프로그램 이용하기

❶ [그림 1]과 같이 삼각형 ABC를 그리고 두 변 AB, AC의 중점 D, E를 이은 선분 DE를 만든다.

❷ [그림 2]와 같이 점 B와 점 D에서 '자취 보이기'를 선택한다.

❸ 점 B를 움직이면서 그림을 그리면 [그림 3]과 같이 점 D에서 $\frac{1}{2}$배로 축소된 그림이 그려진다.

[그림 1]

[그림 2]

[그림 3]

활동 1 위의 두 가지 도구 중 하나를 이용하여 3배로 확대된 도형을 그리는 방법을 설명해 보자.

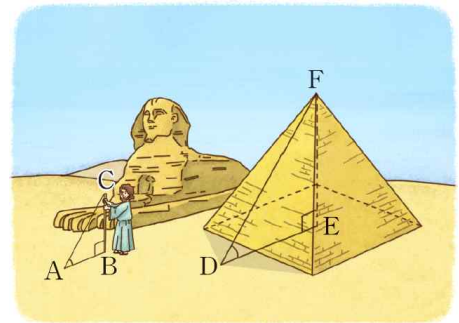
실제로 길이를 재지 않고도
건축물의 높이를 구할 수 있을까

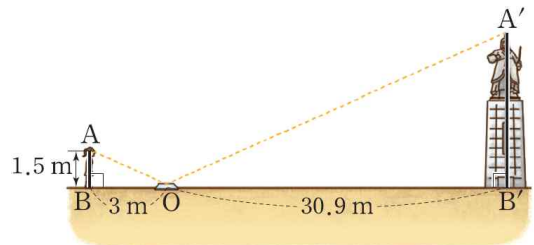
삼각형의 닮음을 이용하면 실제로 길이를 재지 않고도 건축물의 높이를 구할 수 있다.

고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?)는 거대한 피라미드의 높이를 실제로 재지 않고도 알 수 있는 방법을 고민하다가 막대기와 그림자의 길이만으로 피라미드의 높이를 알아내었다고 한다.

(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 I』)

활동 1 다음과 같이 막대기와 그림자의 길이를 이용하여 피라미드의 높이를 구하려고 한다.

1. 막대기를 지면에 수직으로 세웠을 때 막대기의 그림자의 끝 점을 A, 피라미드의 그림자의 끝 점을 D라 하고 두 선분 AB, DE의 길이를 잰다.
2. 막대기의 높이 BC의 길이를 잰다.
3. 두 직각삼각형 ABC와 DEF는 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같으므로 닮은 삼각형이다. 이를 이용하여 피라미드의 높이 EF의 길이를 구한다.

$\overline{AB}=0.9\,\text{m}$, $\overline{BC}=1.2\,\text{m}$, $\overline{DE}=120\,\text{m}$일 때, 피라미드의 높이를 구해 보자.

활동 2 빛이 거울에 비칠 때, 입사각과 반사각의 크기는 서로 같다. 현지는 아산시에 있는 충무공 동상의 높이를 구하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 거울을 충무공 동상의 끝이 비치는 지점에 놓고 거리를 측정하였다. 현지의 눈높이는 1.5 m, 현지와 거울 사이의 거리는 3 m, 거울과 충무공 동상 사이의 거리는 30.9 m이다. 삼각형의 닮음을 이용하여 지면으로부터의 충무공 동상의 높이를 구해 보자.

중단원 마무리

Ⅵ-1 도형의 닮음

정답 및 풀이 296쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 도형의 닮음 189쪽

(1) 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 ☐ 인 관계에 있다고 하고 닮음인 관계에 있는 두 도형을 닮은 도형이라고 한다.

(2) 두 도형이 닮은 도형일 때, 기호 ☐를 사용하여 나타내고 두 도형의 꼭짓점은 대응하는 순서대로 쓴다.

(3) 닮은 두 평면도형에서 대응하는 변의 길이의 비를 ☐ 라고 한다.

❷ 닮은 도형의 성질 190쪽

(1) 닮은 두 평면도형에서 대응하는 ☐의 길이의 비는 일정하고 대응하는 ☐의 크기는 각각 같다.

(2) 닮은 두 입체도형에서 대응하는 ☐ 의 길이의 비는 일정하고 대응하는 면은 닮은 도형이다.

❸ 삼각형의 닮음 조건 194쪽

두 삼각형은 다음 각 경우에 닮은 도형이다.

(1) 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

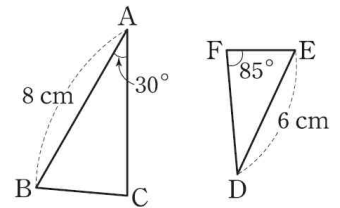
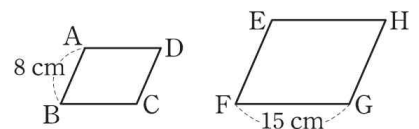
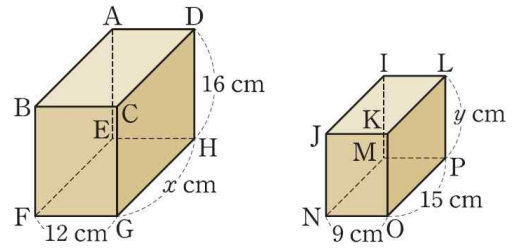
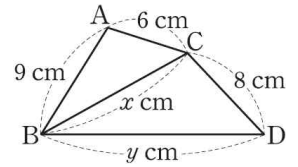
(2) 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때

(3) 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

표준 문제

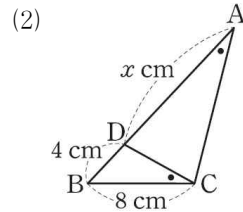
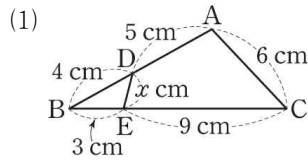
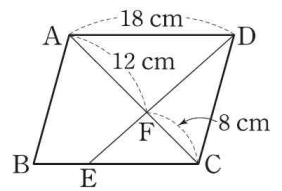
01 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$일 때, 다음을 구하시오.

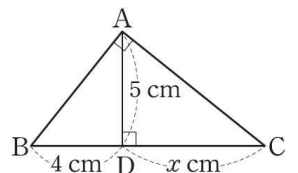
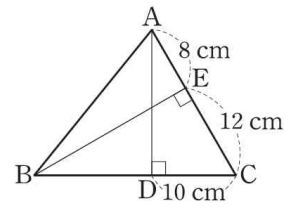
(1) $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비

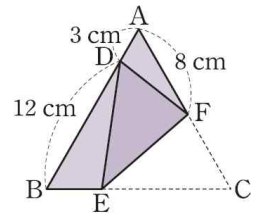
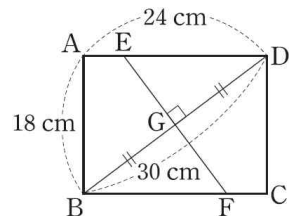
(2) $\angle B$의 크기

02 오른쪽 그림에서 두 평행사변형 ABCD와 EFGH는 닮은 도형이다. 닮음비가 $2:3$일 때, 사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오.

03 오른쪽 그림에서 두 직육면체는 닮은 도형이고 면 ABCD에 대응하는 면이 면 IJKL일 때, $x-y$의 값을 구하시오.

04 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$일 때, $x+y$의 값을 구하시오.

05 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

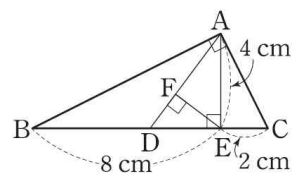
(1)

(2)

서술형

06 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 점 F는 $\overline{AC}$와 $\overline{DE}$의 교점이다. $\overline{AD}=18\,cm$, $\overline{AF}=12\,cm$, $\overline{CF}=8\,cm$일 때, $\overline{BE}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결

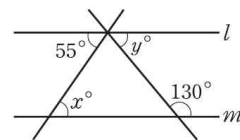
07 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{AD}=5\,cm$, $\overline{BD}=4\,cm$일 때, x의 값을 구하시오.

서술형 **08** 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B에서 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자. $\overline{AE}=8\,cm$, $\overline{CE}=12\,cm$, $\overline{CD}=10\,cm$일 때, $\overline{BD}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

도전 문제

추론 **09** 오른쪽 정삼각형 ABC에서 $\overline{EF}$를 접는 선으로 하여 꼭짓점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점 D에 오도록 접었다. $\overline{AD}=3\,cm$, $\overline{AF}=8\,cm$, $\overline{BD}=12\,cm$일 때, $\overline{CE}$의 길이를 구하시오.

10 오른쪽 직사각형 ABCD에서 $\overline{BD}$의 수직이등분선과 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 교점을 각각 E, F라 하고 $\overline{BD}$와 $\overline{EF}$의 교점을 G라고 하자. $\overline{AB}=18\,cm$, $\overline{AD}=24\,cm$, $\overline{BD}=30\,cm$일 때, 삼각형 EGD의 둘레의 길이를 구하시오.

서술형 **11** 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC에서 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이고 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$, $\overline{AD}\perp\overline{EF}$이다. $\overline{AE}=4\,cm$, $\overline{BE}=8\,cm$, $\overline{CE}=2\,cm$일 때, 다음 선분의 길이를 구하시오.

(1) $\overline{AD}$ (2) $\overline{EF}$ (3) $\overline{AF}$

2 닮음의 응용

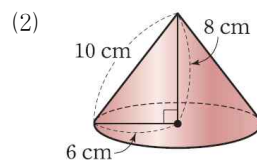
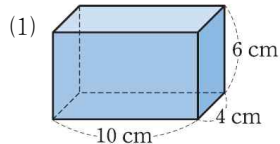
준비 학습

평행선의 성질

❶ 오른쪽 그림에서 $l /\!/ m$일 때, x, y의 값을 구하시오.

입체도형의 겉넓이와 부피

❷ 다음 각기둥과 원뿔의 겉넓이, 부피를 구하시오.

(1)

(2)

평행선 사이의 선분의 길이의 비

평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.

삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비

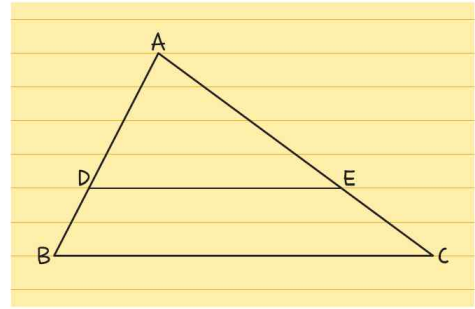
오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC에 평행한 직선을 긋고 이 직선이 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라고 하자.

탐구 ① 자로 길이를 재어 $\overline{AB}:\overline{AD}$와 $\overline{AC}:\overline{AE}$를 구한 후 그 결과를 비교해 보자.

탐구 ② 자로 길이를 재어 $\overline{AD}:\overline{DB}$와 $\overline{AE}:\overline{EC}$를 구한 후 그 결과를 비교해 보자.

삼각형의 한 변에 평행한 직선을 그을 때 생기는 선분의 길이의 비를 알아보자.

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$에 평행한 직선과 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 교점을 각각 D, E라고 하면 △ABC와 △ADE에서

$\angle A$는 공통, $\angle ABC=\angle ADE$ (동위각)

이므로 △ABC ∽ △ADE이다.

평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때 생기는 동위각의 크기는 같다.

이때 닮은 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 모두 같으므로

$$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE} \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

또 점 E를 지나면서 $\overline{AB}$에 평행한 직선과 $\overline{BC}$의 교점을 F라고 하면 △ADE와 △EFC에서

$\angle A=\angle CEF$, $\angle AED=\angle C$ (동위각)

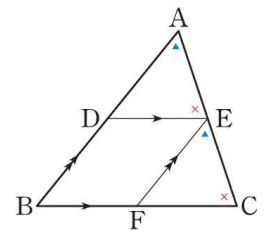
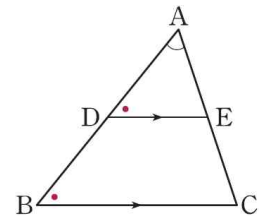
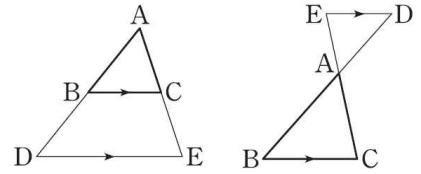
이므로 △ADE ∽ △EFC이다.

이때 닮은 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 모두 같으므로

$$\overline{AD}:\overline{EF}=\overline{AE}:\overline{EC}$$

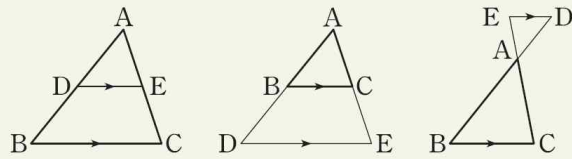
이고, □DBFE는 평행사변형이므로 $\overline{EF}=\overline{DB}$이다. 즉

$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC} \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

한편 삼각형 ABC에서 변 BC에 평행한 직선과 두 변 AB, AC의 연장선의 교점을 각각 D, E라고 하면 이 경우에도 ①, ②가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

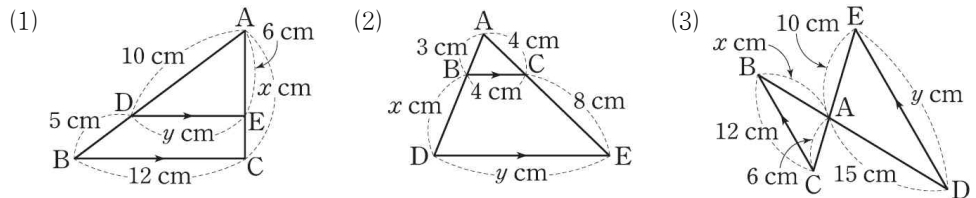
삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비

삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC 또는 그 연장선 위의 점을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이면

❶ $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$ ❷ $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$

문제 1 다음 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x, y의 값을 구하시오.

(1)

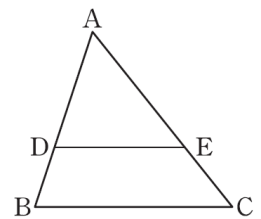
(2)

(3)

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위에 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}$가 되도록 점 D, E를 잡으면 $\triangle ABC$와 $\triangle ADE$에서

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}, \ \angle A\text{는 공통}$$

이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이다.

따라서 $\angle ABC = \angle ADE$이므로 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이다.

또한 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$이면 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$도 성립한다.

일반적으로 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC 또는 그 연장선 위의 점을 각각 D, E라고 할 때 다음이 성립한다.

❶ $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}$이면 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이다.

❷ $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$이면 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이다.

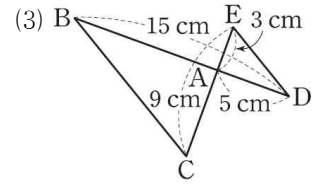
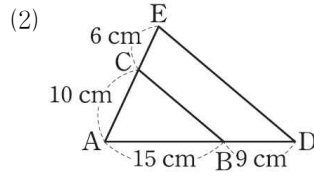
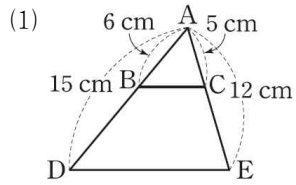
문제 2 다음 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$ 인 것을 모두 찾으시오.

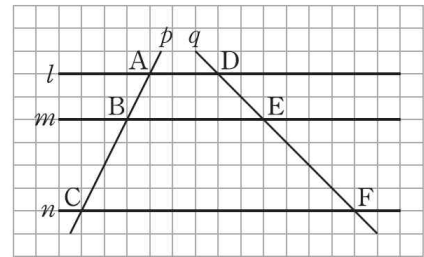
(1)

(2)

(3)

평행선 사이의 선분의 길이의 비

생각톡

오른쪽 그림과 같이 평행한 세 직선 l, m, n과 두 직선 p, q의 교점을 각각 A, B, C, D, E, F라고 하자.

탐구 $\overline{AB} : \overline{BC}$ 와 $\overline{DE} : \overline{EF}$ 를 구한 후 그 결과를 비교해 보자.

평행한 세 직선과 다른 두 직선이 만날 때 생기는 선분의 길이의 비를 알아보자.

평행한 세 직선 l, m, n과 두 직선 p, q의 교점을 각각 A, B, C, D, E, F라고 하자.

이때 점 A를 지나고 직선 q에 평행한 직선과 직선 m, n의 교점을 각각 G, H라고 하면 $\triangle ACH$에서 $\overline{BG} /\!/ \overline{CH}$ 이므로

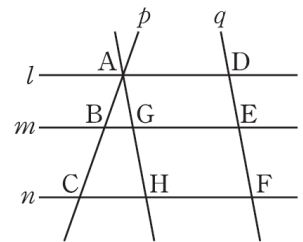
$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AG} : \overline{GH} \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 또 □AGED 와 □GHFE 는 평행사변형이므로

$$\overline{AG} = \overline{DE}, \ \overline{GH} = \overline{EF} \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 따라서 ①, ②에 의하여

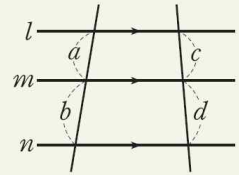
$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

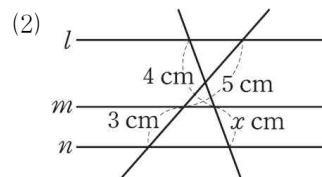
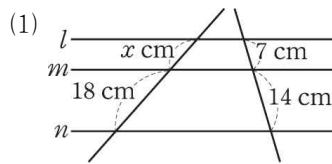
평행선 사이의 선분의 길이의 비

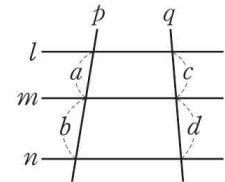
평행한 세 직선이 다른 두 직선과 만날 때, 평행선 사이의 선분의 길이의 비는 같다.

즉 오른쪽 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$이면

$a : b = c : d$

문제 3 다음 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때, x의 값을 구하시오.

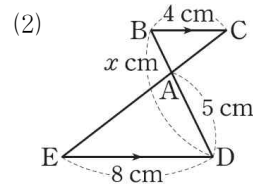
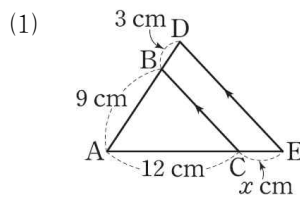
(1)

(2)

설명하기

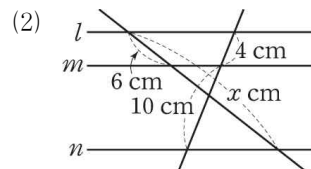
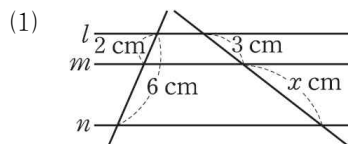
오른쪽 그림과 같이 세 직선 l, m, n과 두 직선 p, q가 만날 때 생기는 선분의 길이를 각각 a, b, c, d라고 하자. 이때 $a : b = c : d$라고 해도 세 직선 l, m, n이 반드시 평행한 것은 아니다. 선분의 길이의 비가 같아도 세 직선이 평행하지 않은 예를 찾아 설명해 보자.

확인하기

1 다음 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

2 다음 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

자를 이용하지 않고 종이 등분하기

추론 의사소통

직사각형 모양의 종이를 한 방향으로 계속 반으로 접으면 종이를 2등분, 4등분, 8등분, … 할 수 있다. 그러나 같은 방법으로 종이를 3등분이나 5등분 할 수는 없다.

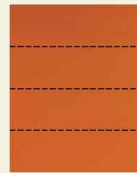
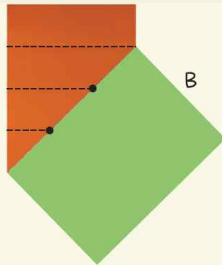
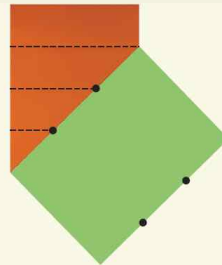
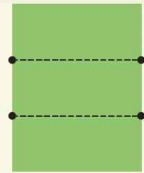
자를 이용하지 않고서 종이를 3등분, 5등분 하는 방법은 없을까?

다음은 종이접기를 이용하여 직사각형 모양의 종이를 3등분 한 것이다.

❶ 직사각형 모양의 종이 A를 반으로 접고 다시 한 번 반으로 접었다가 펴서 [그림 1]과 같이 4등분선을 만든다.

❷ [그림 2]와 같이 직사각형 모양의 종이 B의 한쪽 끝을 종이 A의 끝과 맞춘 후 다른 한쪽 끝을 종이 A의 3번째 접은 선에 맞춘다. 종이 A의 접은 선과 만나는 점을 종이 B 위에 모두 표시한다.

❸ [그림 3]과 같이 종이 B에서 점을 표시한 변과 마주 보는 변에 대해서도 ❷와 같은 방법으로 점을 표시한다.

❹ [그림 4]와 같이 ❷와 ❸에서 표시한 점을 평행하게 연결한다.

[그림 1] [그림 2] [그림 3] [그림 4]

활동 1 [그림 4]의 선들이 종이를 3등분 하는 이유를 설명해 보자.

활동 2 위와 같이 종이접기를 이용하여 직사각형 모양의 종이를 5등분 하고 그 방법을 설명해 보자.

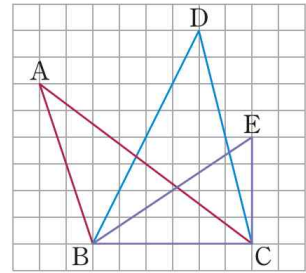
삼각형의 무게중심

삼각형의 무게중심의 성질을 이해한다.

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질

오른쪽 그림은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 세 삼각형 ABC, DBC, EBC를 그린 것이다.

탐구 ① 세 삼각형에서 변 BC를 제외한 두 변의 중점을 연결한 선분을 각각 그려 보고, 각 선분의 길이와 변 BC의 길이 사이에 어떤 관계가 있는지 말해 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 그린 세 선분이 변 BC와 평행한지 확인해 보자.

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 알아보자.

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 D, E라고 하면

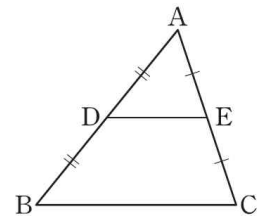
$$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$$

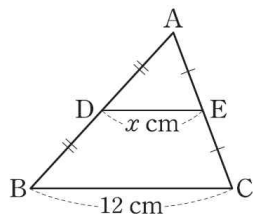
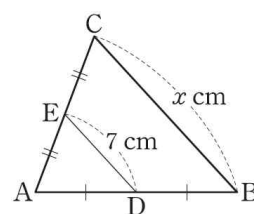
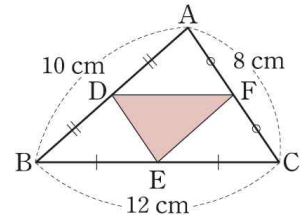
이므로 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이다.

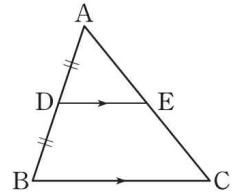
따라서 삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 의하여

$$\overline{BC}:\overline{DE}=\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$$

이므로 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이다.

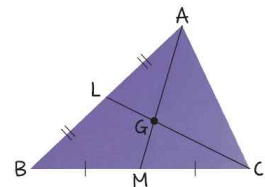
즉 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 한 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

문제 1 다음 그림과 같은 삼각형 ABC에서 두 점 D, E가 각각 두 변 AB, AC의 중점일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 2 오른쪽 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, AC의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 둘레의 길이를 구하시오.

추론

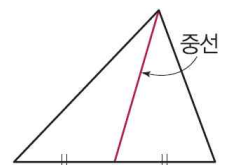
문제 3 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점 D를 지나고 변 BC에 평행한 직선과 변 AC의 교점을 E라고 할 때, 점 E가 변 AC의 중점임을 설명하시오.

설명하기 사각형의 네 변의 중점을 연결한 사각형은 항상 평행사변형임을 설명해 보자.

삼각형의 무게중심

생각톡 종이로 삼각형 ABC를 만들고 다음과 같이 활동해 보자.

❶ 변 AB의 중점 L을 잡고 선분 CL을 긋는다.
❷ 변 BC의 중점 M을 잡고 선분 AM을 긋는다.
❸ 두 선분 CL과 AM의 교점을 G라고 표시한다.

탐구 ① 변 AC의 중점 N을 잡고 선분 BN을 그어서 선분 BN이 점 G를 지나는지 확인해 보자.

탐구 ② 삼각형 모양의 종이를 연필 심 위에 점 G가 오도록 올려 보고 종이가 평형을 이루는지 확인해 보자.

삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 **중선**이라고 한다. 한 삼각형에는 3개의 중선이 있다.

위의 **생각톡**에서 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만남을 관찰할 수 있다.

삼각형의 세 중선이 한 점에서 만남을 설명해 보자.

$\triangle$ABC에서 두 중선 AD, BE의 교점을 G라고 하자.

두 점 D, E는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$의 중점이므로

$$\overline{DE} /\!/ \overline{AB},\ \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

이다. 따라서 $\triangle$GAB$\backsim\triangle$GDE이고 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{DE}=2:1$이므로 다음이 성립한다.

△GAB와 △GDE에서
∠GAB = ∠GDE (엇각),
∠GBA = ∠GED (엇각)
이므로
△GAB∽△GDE

$$\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}=2:1 \qquad \cdots\cdots ①$$

또 $\triangle$ABC에서 두 중선 AD, CF의 교점을 G$'$이라 하고 위와 같은 방법으로 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AG'}:\overline{G'D}=\overline{CG'}:\overline{G'F}=2:1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 두 점 G, G$'$은 모두 중선 AD를 $2:1$로 나누는 점이므로 일치한다.

따라서 $\triangle$ABC에서 세 중선은 한 점 G에서 만나고 이 점은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 나눈다.

이때 삼각형의 세 중선의 교점을 그 삼각형의 **무게중심**이라고 한다.

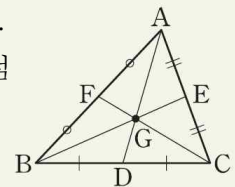
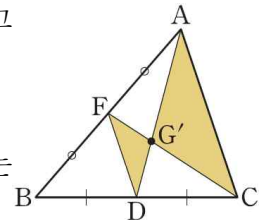
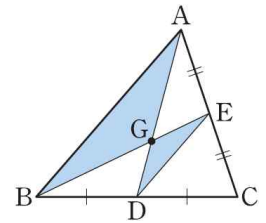
이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형의 무게중심

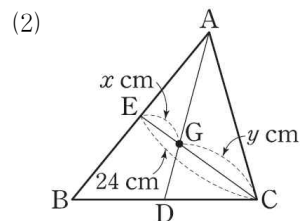
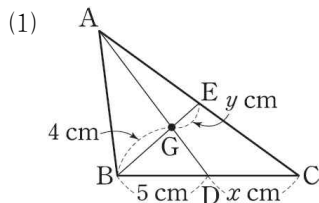
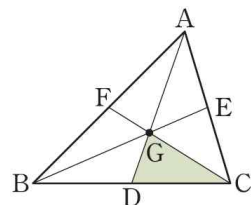
❶ 삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만난다.

❷ 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 나눈다.

즉 오른쪽 삼각형 ABC에서

$$\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}=\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$$

문제 4 다음 그림에서 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심일 때, x, y의 값을 구하시오.

(1)

(2)

예제 1 오른쪽 그림에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $30\,cm^2$일 때, 삼각형 GDC의 넓이를 구하시오.

점 D는 $\overline{BC}$의 중점이고 △ABC와 △ADC의 높이가 같으므로

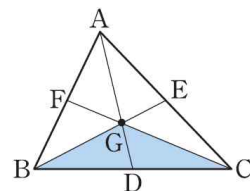
$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{2}\times 30 = 15(cm^2)$$

점 G는 △ABC의 무게중심이므로 $\overline{AD}$를 점 A로부터 2 : 1로 나눈다. 이때 △ADC와 △GDC의 높이가 같으므로

$$\triangle GDC = \frac{1}{3}\triangle ADC = \frac{1}{3}\times 15 = 5(cm^2)$$

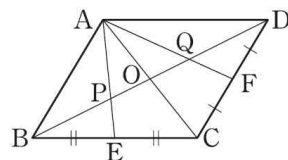
답 $5\,cm^2$

문제 5 오른쪽 그림에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다. 삼각형 GBC의 넓이가 $6\,cm^2$일 때, 다음 도형의 넓이를 구하시오.

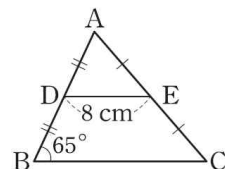
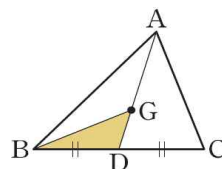
(1) △ABC (2) □GFBD

추론

문제 6 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 두 변 BC, CD의 중점을 각각 E, F라 하고 대각선 BD가 세 선분 AE, AC, AF와 만나는 점을 각각 P, O, Q라고 하자. 다음에 답하시오.

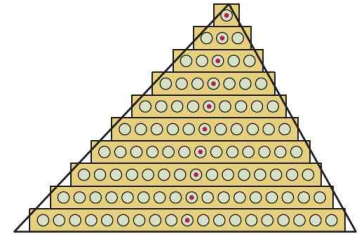
(1) 점 P가 △ABC의 무게중심임을 설명하시오.

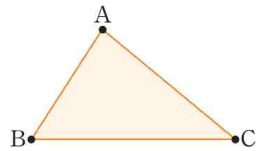
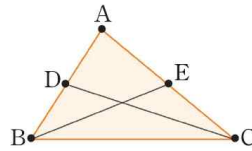
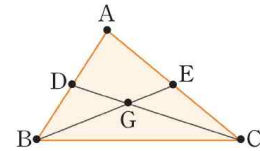
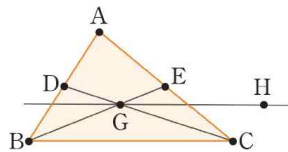
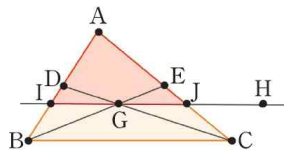
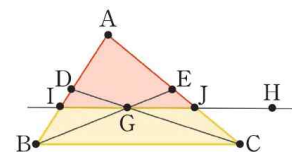
(2) $\overline{BD} = 12\,cm$일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오.

확인하기

1 오른쪽 삼각형 ABC에서 두 점 D, E가 각각 두 변 AB, AC의 중점일 때, 다음을 구하시오.

(1) ∠ADE의 크기 (2) $\overline{BC}$의 길이

2 오른쪽 그림에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다. 삼각형 GBD의 넓이가 $7\,cm^2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

무게중심을 지나는 직선은 삼각형의 넓이를 항상 이등분할까

정보 처리 | 추론

삼각형을 가는 막대들을 쌓은 것으로 생각하면 각 막대의 무게중심은 자기 자신의 가운데 있으므로 삼각형의 무게중심도 각 막대의 가운데를 연결한 선, 즉 중선 위에 있음을 알 수 있다.

한편 삼각형의 중선은 삼각형의 넓이를 이등분한다. 그렇다면 무게중심을 지나는 모든 직선이 항상 삼각형의 넓이를 이등분하는지 컴퓨터 프로그램을 이용하여 알아보자.

❶ [도구]를 선택하여 예각삼각형 ABC를 만든다.

❷ [도구]를 선택하여 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점 D, E를 만들고 [도구]를 선택하여 $\overline{BE}$, $\overline{CD}$를 만든다.

❸ [도구]를 선택하여 $\overline{BE}$, $\overline{CD}$의 교점 G를 만든다.

❹ [도구]를 선택하여 점 G를 지나는 직선 GH를 만든다.

❺ [도구]를 선택하여 삼각형 AIJ를 만든다.

❻ [도구]를 선택하여 사각형 IBCJ를 만든다.

활동 1 [도구]를 이용하여 삼각형 AIJ와 사각형 IBCJ의 넓이를 비교해 보자.

활동 2 [도구]를 선택한 후 점 H를 움직이면서 삼각형 AIJ와 사각형 IBCJ의 넓이의 변화를 관찰하여 무게중심을 지나는 모든 직선이 항상 삼각형의 넓이를 이등분하는지 말해 보자.

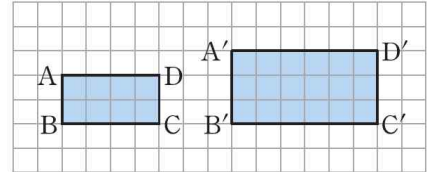
닮은 도형의 넓이와 부피

닮음비를 이용하여 닮은 도형의 넓이의 비, 부피의 비를 구할 수 있다.

닮은 도형의 넓이의 비와 부피의 비

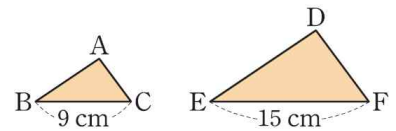
오른쪽 그림은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 닮은 두 직사각형 ABCD와 A′B′C′D′을 그린 것이다.

탐구 ① 두 직사각형 ABCD와 A′B′C′D′의 닮음비를 구해 보자.

탐구 ② 두 직사각형 ABCD와 A′B′C′D′의 넓이의 비를 구해 보자.

위의 생각톡에서 닮은 두 직사각형 ABCD와 A′B′C′D′의 닮음비는 $2:3$이고, 넓이의 비는 $8:18=4:9=2^2:3^2$이다.

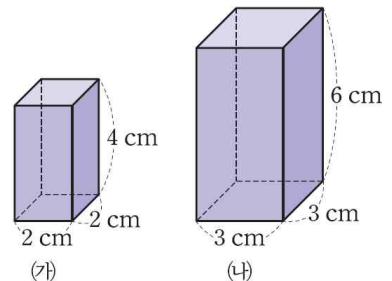
즉 닮은 두 직사각형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같음을 알 수 있다.

일반적으로 닮은 두 평면도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같다.

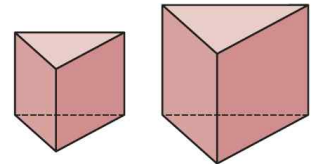
문제 1 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 18 cm^2일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 구하시오.

닮은 도형에서 닮음비와 부피의 비 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

오른쪽 그림에서 두 직육면체 ㈎와 ㈏는 닮은 도형이고, 닮음비는 모서리의 길이의 비이므로 $2:3$이다. 이때 두 직육면체의 부피의 비는

$$\begin{aligned}(2\times2\times4):(3\times3\times6)&=16:54\\&=8:27\\&=2^3:3^3\end{aligned}$$

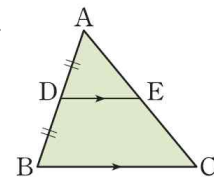
이다.

닮음비 ➔ 2 : 3
부피의 비 ➔ $2^3 : 3^3$

즉 닮은 두 직육면체의 부피의 비는 닮음비의 세제곱과 같음을 알 수 있다.
일반적으로 닮은 두 입체도형의 부피의 비는 닮음비의 세제곱과 같다.

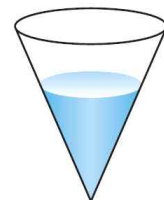
문제 2 오른쪽 그림에서 두 삼각기둥 ㈎와 ㈏는 닮음비가 3 : 4인 닮은 도형이다. 삼각기둥 ㈏의 부피가 $128\,cm^3$일 때, 삼각기둥 ㈎의 부피를 구하시오.

문제 3 구 모양인 축구공과 농구공은 닮은 도형이다. 오른쪽 축구공과 농구공의 지름의 길이가 각각 20 cm, 24 cm일 때, 다음을 구하시오.

(1) 축구공과 농구공의 부피의 비
(2) 축구공과 농구공의 겉넓이의 비

확인하기

1 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}=\overline{DB}$이고 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이다. 삼각형 ADE의 넓이가 $8\,cm^2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

2 오른쪽 그림과 같은 원뿔 모양의 그릇에 전체 높이의 $\frac{2}{3}$까지 물을 넣었다. 그릇의 부피가 $54\,cm^3$일 때, 물의 부피를 구하시오.

중단원 마무리

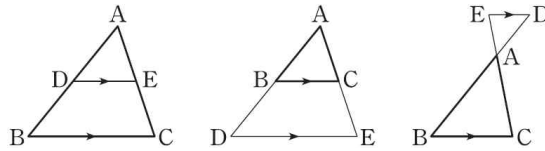
정답 및 풀이 298쪽

스스로 완성해 봅시다

❶ 평행선 사이의 선분의 길이의 비 204쪽

(1) 삼각형에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비

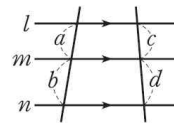
삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC 또는 그 연장선 위의 점을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이면

① $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} =$ ☐ $: \overline{DE}$

② $\overline{AD} :$ ☐ $= \overline{AE} : \overline{EC}$

(2) 평행선 사이의 선분의 길이의 비

오른쪽 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$이면

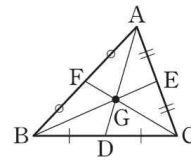
$a : b = c : d$

❷ 삼각형의 무게중심 209쪽

(1) ☐ : 삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분

(2) ☐ : 삼각형의 세 중점의 교점

(3) 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심일 때,

$\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} =$ ☐ : ☐

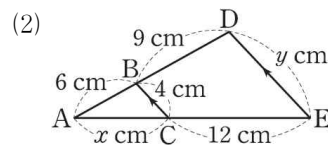
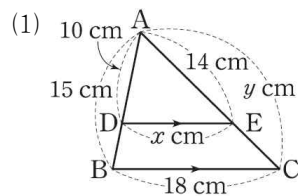
❸ 닮은 도형의 넓이와 부피 214쪽

(1) 닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m : n$이면 넓이의 비는 $m^2 : n^2$이다.

(2) 닮은 두 입체도형의 닮음비가 $m : n$이면 부피의 비는 $m^3 : n^3$이다.

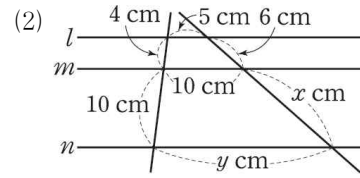
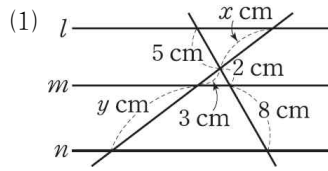
표준 문제

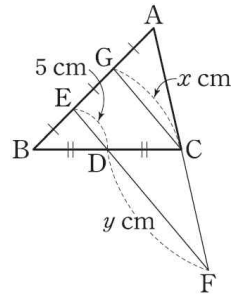
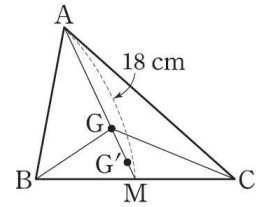
01 다음 그림에서 $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 때, x, y의 값을 구하시오.

(1)

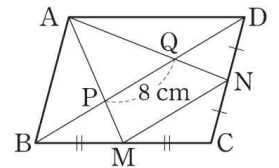
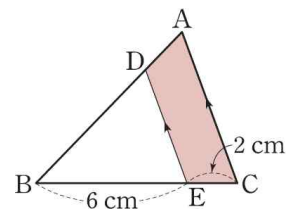
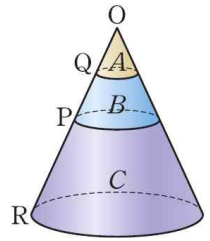
(2)

02 다음 그림에서 $l \,/\!/\, m \,/\!/\, n$일 때, x, y의 값을 구하시오.

(1)

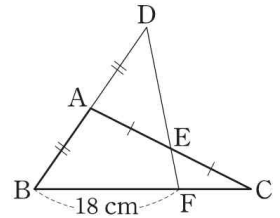
(2)

03 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AG}=\overline{GE}=\overline{EB}$이다. $\overline{BC}$의 중점을 D라 하고 $\overline{AC}$의 연장선과 $\overline{ED}$의 연장선의 교점을 F라고 하자. $\overline{ED}=5\,\text{cm}$일 때, $x+y$의 값을 구하시오.

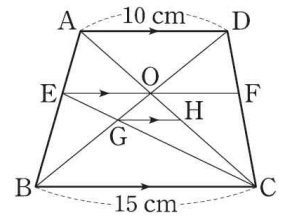
서술형

04 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AM}$은 삼각형 ABC의 중선이고 두 점 G, G′은 각각 삼각형 ABC, GBC의 무게중심이다. $\overline{AM}=18\,\text{cm}$일 때, $\overline{AG'}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결

05 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하고 대각선 BD와 $\overline{AM}$, $\overline{AN}$의 교점을 각각 P, Q라고 하자. $\overline{PQ}=8\,\text{cm}$일 때, $\overline{MN}$의 길이를 구하시오.

서술형

06 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{AC}$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $24\,\text{cm}^2$일 때, 사각형 ADEC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

07 오른쪽 그림과 같은 원뿔에서 점 P는 모선 OR의 중점이고, 점 Q는 $\overline{OP}$의 중점이다. 원뿔을 두 점 P, Q를 각각 지나면서 밑면에 평행한 평면으로 잘랐을 때 생기는 입체도형을 각각 원뿔 A, 원뿔대 B, 원뿔대 C라고 하자. 원뿔 A의 부피가 $2\,\text{cm}^3$일 때, 원뿔대 C의 부피를 구하시오.

도전 문제

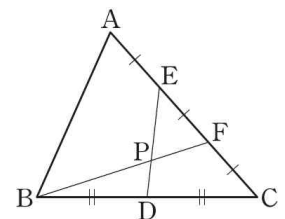
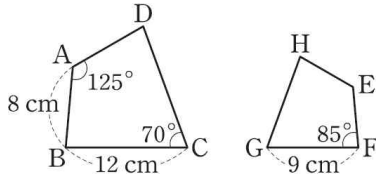
문제 해결

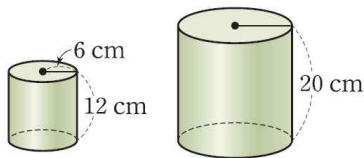
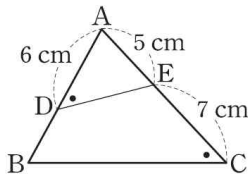
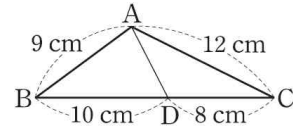
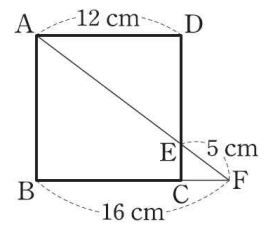
08 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{BA}$의 연장선 위에 $\overline{BA}=\overline{AD}$인 점 D를 잡고 점 D와 $\overline{AC}$의 중점 E를 지나는 직선과 $\overline{BC}$의 교점을 F라고 하자. $\overline{BF}=18\,\text{cm}$일 때, $\overline{CF}$의 길이를 구하시오.

서술형

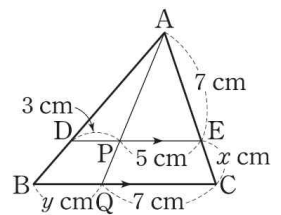
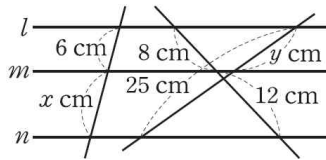
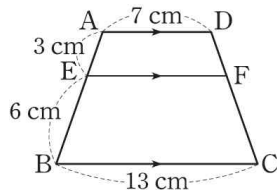
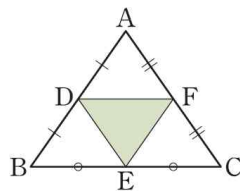
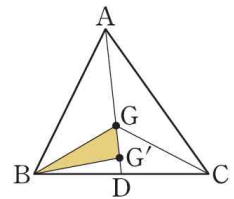
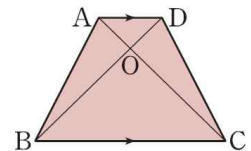
09 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점 O를 지나면서 $\overline{AD}$에 평행한 직선과 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 교점을 각각 E, F라 하고, $\overline{BD}$와 $\overline{CE}$의 교점 G를 지나면서 $\overline{EF}$에 평행한 직선과 $\overline{AC}$의 교점을 H라고 하자. $\overline{AD}=10\,\text{cm}$, $\overline{BC}=15\,\text{cm}$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{AE}:\overline{EB}$ (2) $\overline{EO}$의 길이

(3) $\overline{GH}$의 길이

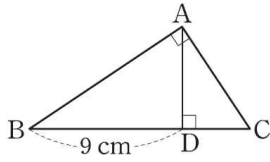
10 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{BD}=\overline{DC}$, $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FC}$이고 점 P는 $\overline{DE}$와 $\overline{BF}$의 교점이다. 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 PBD의 넓이의 몇 배인지 구하시오.

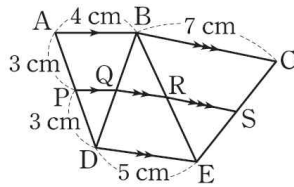
정답 및 풀이 299쪽

01 아래 그림에서 $\square ABCD \backsim \square EFGH$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\square ABCD$와 $\square EFGH$의 닮음비
(2) $\overline{EF}$의 길이
(3) $\angle H$의 크기

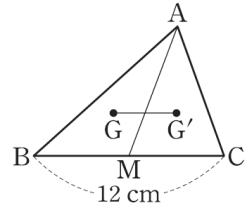
02 다음 그림에서 두 원기둥이 닮은 도형일 때, 큰 원기둥의 밑면의 둘레의 길이를 구하시오.

03 다음 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}=6\text{ cm}$, $\overline{AE}=5\text{ cm}$, $\overline{CE}=7\text{ cm}$이다. $\angle ADE=\angle C$일 때, $\overline{DB}$의 길이를 구하시오.

04 다음 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$의 길이를 구하시오.

05 오른쪽 정삼각형 ABCD에서 $\overline{CD}$ 위의 한 점 E를 잡고 $\overline{AE}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 연장선의 교점을 F라 고 하자. $\overline{AD}=12\text{ cm}$, $\overline{BF}=16\text{ cm}$, $\overline{EF}=5\text{ cm}$일 때, 다음 선분의 길이를 구하시오.

(1) $\overline{AE}$　　　(2) $\overline{DE}$

06 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$이고 꼭짓점 A에서 그은 선분과 $\overline{DE}$, $\overline{BC}$의 교점을 각각 P, Q라 고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오.

07 다음 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때, x, y의 값을 구하시오.

08 다음 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD} /\!/ \overline{EF} /\!/ \overline{BC}$일 때, $\overline{EF}$의 길이를 구하시오.

09 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 $48\,\text{cm}^2$일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 구하시오.

10 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$는 삼각형 ABC의 중선이고 두 점 G, G′은 각각 두 삼각형 ABC, GBC의 무게중심이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $72\,\text{cm}^2$일 때, 삼각형 GBG′의 넓이를 구하시오.

11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 삼각형 AOD의 넓이는 $3\,\text{cm}^2$, 삼각형 OBC의 넓이는 $27\,\text{cm}^2$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오. (단, O는 두 대각선의 교점이다.)

12 두 지점 A, B 사이의 실제 거리가 1.8 km일 때, 축척이 $\frac{1}{30000}$인 지도에서의 두 지점 A, B 사이의 거리는 몇 cm인지 구하시오.

서술형

13 오른쪽 그림과 같이 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\overline{BD} = 9\,\text{cm}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 $27\,\text{cm}^2$일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

14 오른쪽 그림에서 $\overline{AB} /\!/ \overline{PQ}$, $\overline{QR} /\!/ \overline{DE}$, $\overline{BC} /\!/ \overline{RS}$일 때, $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 오른쪽 삼각형 ABC에서 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이고 두 점 G, G′은 각각 두 삼각형 ABM, AMC의 무게중심이다. $\overline{BC} = 12\,\text{cm}$일 때, $\overline{GG'}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 오른쪽 그림과 같은 원뿔 모양의 그릇에 일정한 속도로 물을 채우고 있다. 물을 전체 높이의 $\frac{1}{3}$만큼 채우는 데 5초가 걸렸을 때, 가득 채우려면 앞으로 몇 초가 더 걸리는지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

❶ 도형의 닮음의 의미와 닮은 도형의 성질을 이해한다.

❷ 삼각형의 닮음 조건을 이해한다.

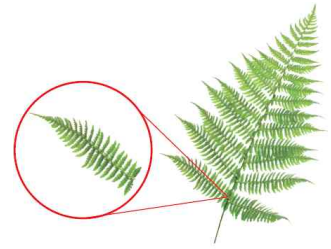
❸ 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.

❹ 삼각형의 무게중심의 성질을 이해한다.

❺ 닮음비를 이용하여 닮은 도형의 넓이의 비, 부피의 비를 구할 수 있다.

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

닮은 도형을 이용하여 입체 카드 만들기

오른쪽과 같이 고사리 잎을 확대해 보면 일부분과 전체가 서로 닮아 있는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 부분이 전체와 닮아 있는 성질을 자기 유사성이라고 하며 이러한 성질을 갖는 구조를 프랙털(fractal) 구조라고 한다. 프랙털 구조는 매우 복잡해 보이지만 그 속에는 반복되는 규칙이 있다. 이러한 프랙털 구조는 브로콜리, 해안선의 모양, 번개, 눈송이 등과 같은 자연 현상에서 찾아볼 수 있다.

고사리 잎

로마네스코 브로콜리

해안선

번개

프랙털 구조는 자연 현상의 연구뿐만 아니라 수학적 분석, 생태학적 계산, 과학 기술, 예술 등에서 다양하게 이용되고 있다.

과제 1 다음과 같은 과정을 따라 프랙털 구조를 갖는 입체 카드를 만들어 보고, 이 입체 카드가 프랙털 구조를 갖는 이유를 설명해 보자.

① 종이를 반으로 접었다 편 후 접힌 선의 길이를 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$로 나누어 도면을 그리고 노란 선은 칼로 긋는다.

② 도면의 선을 따라 종이를 접었다 편다. 직육면체 모양을 만든 후 대각선으로 접힌 선을 따라 양옆의 부분을 안쪽으로 밀어 넣는다.

③ ②에서 생긴 2개의 접힌 선에 ①, ②의 과정을 각각 반복하여 닮은 도형을 만든다.

④ ③에서 생긴 양 끝 2개의 접힌 선에 ①, ②의 과정을 각각 반복하여 닮은 도형을 만들고 입체 카드를 완성한다.

①

②

③

④

무게중심과 첨단 과학

모든 물체에는 무게중심이 존재하고 물체를 다른 물건으로 받칠 때 물체는 무게중심에서 평형을 이루게 된다. 따라서 물체에 힘이 가해질 때 물체가 어떤 움직임을 나타내는지를 결정하는 데에 무게중심이 큰 영향을 미친다.

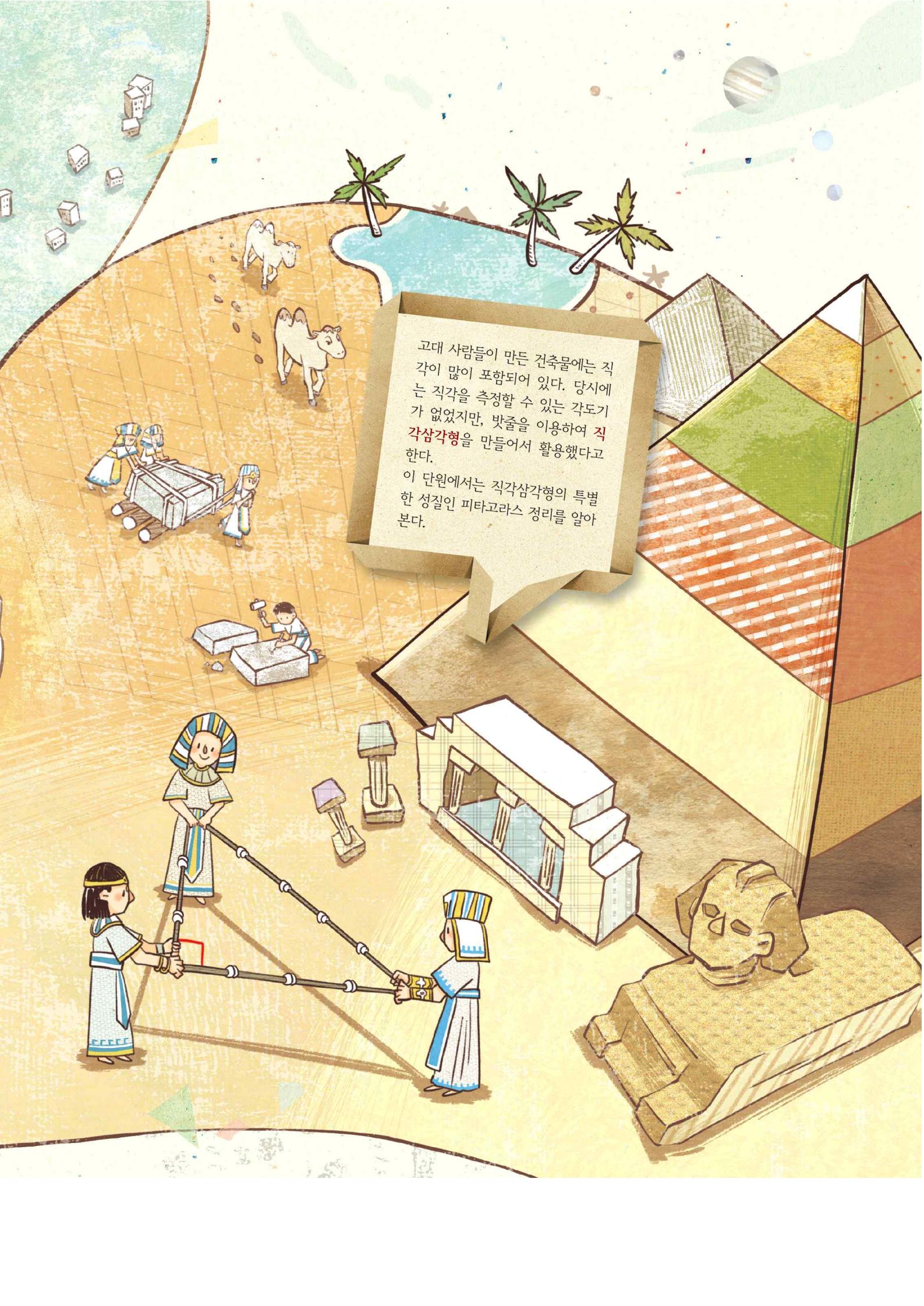
예를 들어 로봇 개발에서 무게중심은 중요한 요소 중 하나이다.
사람이 균형을 유지하면서 걷는 것처럼 로봇이 다리를 바꿔 걸을 때마다 중심을 잡으면서 균형을 유지하도록 하는 것이 로봇 개발의 핵심 기술이다. 로봇 경진대회에는 로봇의 계단 오르기가 여러 과제 중의 하나로 포함되는데, 한국 최초의 두 발로 걸을 수 있는 인간형 로봇인 ‘휴보’는 계단 오르기를 포함한 8가지 과제를 수행하여 ‘2015년 국제 재난 대응 로봇 경진대회’에서 우승하였다.

또한 무게중심은 우리 일상생활과도 매우 밀접하게 맞닿아 있다. 예를 들어 비행기나 배에 화물을 실을 때에는 무게중심이 앞쪽이나 뒤쪽으로 치우치지 않게 실어야 안전하게 운행할 수 있다. 이때 화물마다 부피와 중량이 다르기 때문에 크기와 무게를 모두 고려하여 무게가 한쪽으로 쏠리지 않게 배치하는 것이 매우 중요하다. 무게중심을 고려하지 않고 화물을 실으면 운행 비용이 증가하거나 운행의 안전성이 감소할 수 있다.

(출처: 『사이언스타임스』, 2015. 12. 22., EBS MATH, 2017)

탑재물 관리 책임자 | 항공기의 안전 운항 및 화물의 안전 수송, 수송 운임의 최대화를 위한 항공기 화물의 중량배분을 책임진다.

Ⅶ 피타고라스 정리

배운 내용	이 단원의 내용	배울 내용
중 수학 1 • 기본 도형 • 평면도형의 성질 • 입체도형의 성질 **중 수학 2** • 삼각형과 사각형의 성질 • 도형의 닮음	**1 피타고라스 정리** • 피타고라스 정리	**중 수학 3** • 삼각비 • 원의 성질 **고 수학** • 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식

고대 사람들이 만든 건축물에는 직각이 많이 포함되어 있다. 당시에는 직각을 측정할 수 있는 각도기가 없었지만, 밧줄을 이용하여 직각삼각형을 만들어서 활용했다고 한다.
이 단원에서는 직각삼각형의 특별한 성질인 피타고라스 정리를 알아본다.

1 피타고라스 정리

준비 학습

삼각형의 작도

❶ 다음에 주어진 길이의 세 선분으로 삼각형을 만들 수 있는 것을 모두 찾으시오.

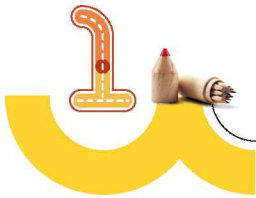
(1) 1 cm, 2 cm, 3 cm

(2) 2 cm, 3 cm, 4 cm

(3) 5 cm, 8 cm, 12 cm

여러 가지 삼각형

❷ 다음 용어의 뜻을 말하시오.

(1) 예각삼각형 (2) 직각삼각형 (3) 둔각삼각형

피타고라스 정리

피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.

피타고라스 정리

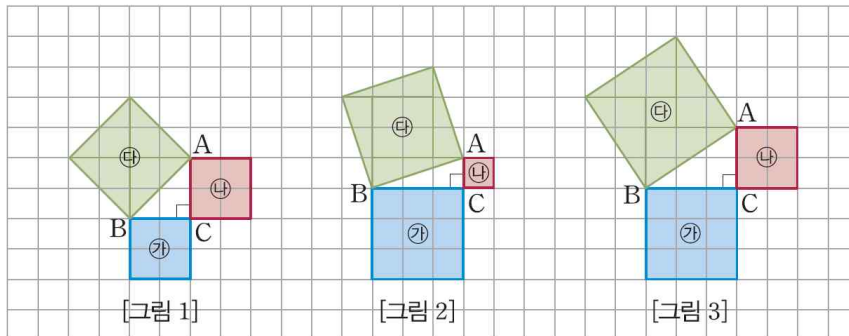
다음은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 $\angle C = 90°$인 직각삼각형 ABC와 그 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 ㉮, ㉯, ㉰를 그린 것이다.

탐구 ① 정사각형 ㉮, ㉯, ㉰의 넓이를 각각 구하여 다음 표를 완성해 보자.

	그림 1	그림 2	그림 3
㉮의 넓이			9
㉯의 넓이		1	
㉰의 넓이	8		

탐구 ② 세 정사각형 ㉮, ㉯, ㉰의 넓이 사이에는 어떤 관계가 있는지 말해 보자.

위의 에서 직각삼각형 ABC의 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 ㉮, ㉯의 넓이의 합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형 ㉰의 넓이와 같음을 관찰할 수 있다. 즉

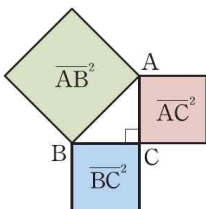
(㉮의 넓이)+(㉯의 넓이)=(㉰의 넓이)

이다.

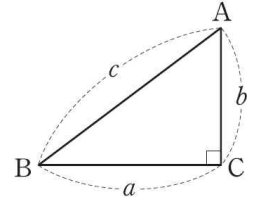
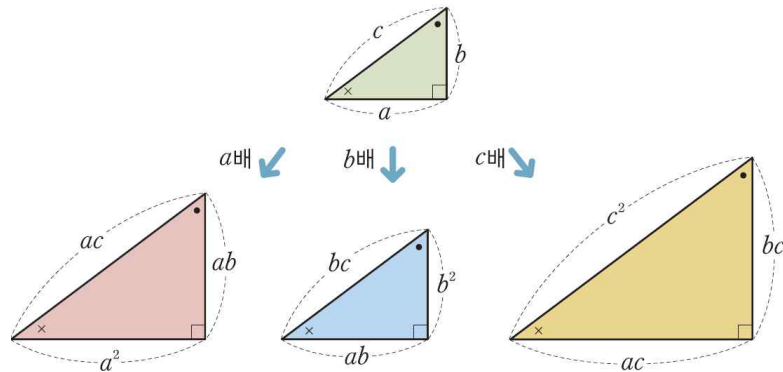
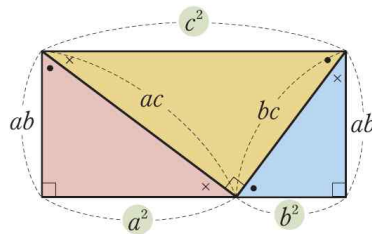
그런데 세 정사각형 ㉮, ㉯, ㉰의 넓이는 각각 $\overline{BC}^2$, $\overline{AC}^2$, $\overline{AB}^2$이므로

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$$

이다.

따라서 위의 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같음을 알 수 있다.

직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b이고 빗변의 길이가 c인 직각삼각형에서

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립함을 설명해 보자.

직각삼각형을 각각 a배, b배, c배로 확대하여 닮은 삼각형 세 개를 만들면 다음과 같다.

새로 만든 세 직각삼각형을 다음 그림과 같이 모으면 직사각형이 된다.

따라서 위의 그림에서 $a^2+b^2=c^2$임을 알 수 있다. 즉 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다.

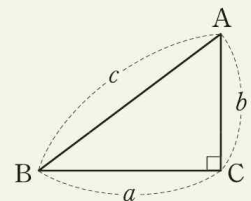
이와 같은 성질을 **피타고라스 정리**라고 한다.

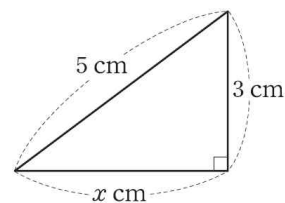
이상을 정리하면 다음과 같다.

피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)는 피타고라스 정리라고 불리는 직각삼각형의 성질을 체계적으로 설명하였다.

피타고라스 정리

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라고 하면

$$a^2+b^2=c^2$$

피타고라스 정리를 이용하면 직각삼각형에서 두 변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.

예제 1 오른쪽 직각삼각형에서 x의 값을 구하시오.

풀이 피타고라스 정리에 의하여 $x^2+3^2=5^2$

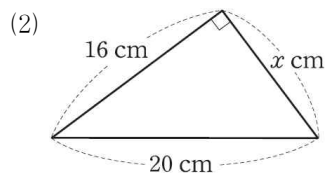
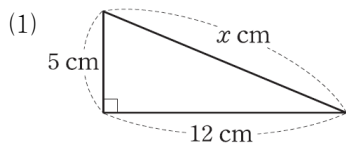
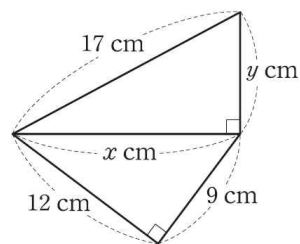
$x^2=25-9=16$

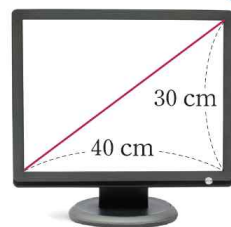
그런데 $x>0$이므로 $x=4$

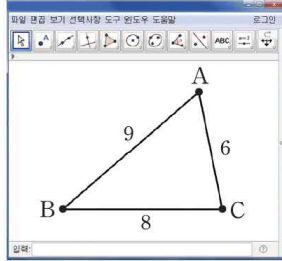
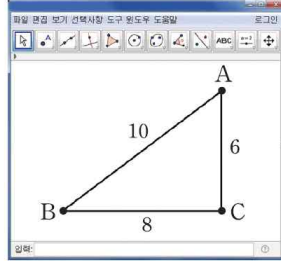
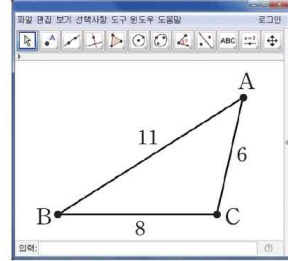
답 4

문제 1 다음 직각삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 2 오른쪽 그림에서 x, y의 값을 구하시오.

설명하기

텔레비전, 모니터, 스마트폰 등에서 화면의 크기는 보통 대각선의 길이로 나타낸다. 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 40 cm, 세로의 길이가 30 cm인 직사각형 모양의 모니터 화면이 있다. 이 모니터 화면의 대각선의 길이를 구하는 방법을 설명하고 그 길이를 구해 보자.

직각삼각형이 되기 위한 조건

다음은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=6$으로 고정하고 $\overline{AB}$의 길이를 각각 9, 10, 11로 변화시키면서 삼각형 ABC를 그린 것이다.

[그림 1]

[그림 2]

[그림 3]

탐구 ① [그림 1]~[그림 3]의 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$의 값과 $\overline{AB}^2$의 값을 비교해 보자.

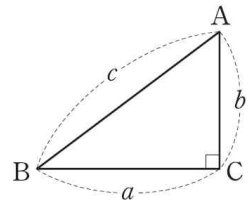
탐구 ② [그림 1]~[그림 3]의 삼각형 ABC 중에서 직각삼각형은 어떤 것인지 찾아보자.

위의 생각톡의 [그림 2]에서 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형 ABC의 세 변의 길이 사이에는 $6^2+8^2=10^2$인 관계가 있고, 이때 이 삼각형은 빗변의 길이가 10인 직각삼각형임을 관찰할 수 있다.

이 성질을 이용하면 주어진 삼각형이 직각삼각형인지 아닌지 판단할 수 있다.

일반적으로 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에 대하여

$$a^2+b^2=c^2$$

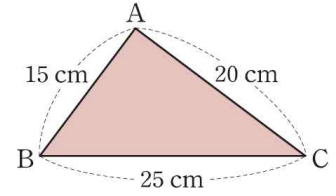
인 관계가 성립하면 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형임이 알려져 있다.

① 세 변의 길이가 3, 4, 5인 삼각형은 $3^2+4^2=5^2$이므로 빗변의 길이가 5인 직각삼각형이다.

② 세 변의 길이가 5, 6, 7인 삼각형은 $5^2+6^2\neq 7^2$이므로 직각삼각형이 아니다.

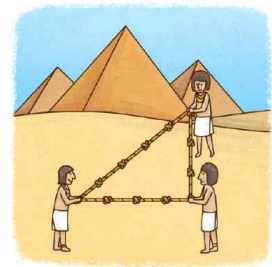
문제 3 세 변의 길이가 다음과 같은 삼각형 중에서 직각삼각형인 것을 모두 고르시오.

(1) 4 cm, 5 cm, 6 cm　　(2) 5 cm, 12 cm, 13 cm

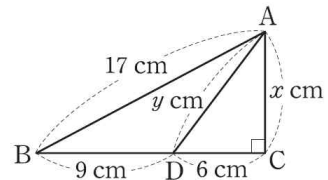
(3) 7 cm, 10 cm, 14 cm　　(4) 7 cm, 24 cm, 25 cm

의사소통
문제 4 오른쪽 삼각형 ABC의 넓이를 구하고 그 방법을 설명하시오.

피타고라스 수

직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 세 자연수의 순서쌍 (a, b, c)를 피타고라스 수(Pythagorean number)라고 한다. 예를 들어 $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(6, 8, 10)$ 등은 잘 알려진 피타고라스 수이다.

고대 이집트의 측량사는 이 피타고라스 수를 이용하여 측량을 했다고 한다. 밧줄을 일정한 간격으로 매듭을 지어 12등분 한 후 오른쪽 그림과 같이 3개, 4개, 5개로 나누어 삼각형을 만들면 이 삼각형은 직각삼각형이 되는데 바로 이 직각삼각형을 사용하여 직각을 측량하였다고 한다.

(출처: 백석윤, 『피타고라스가 들려주는 피타고라스의 정리 이야기』)

확인하기

1 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 x, y의 값을 구하시오.

2 세 변의 길이가 12, 16, a인 삼각형이 직각삼각형이 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, $a > 16$)

여러 가지 도형에서의 피타고라스 정리

추론 의사소통

직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 그렸을 때, 가장 큰 정사각형의 넓이는 나머지 두 정사각형의 넓이의 합과 같음을 확인하였다.

피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 세 변을 각각 지름으로 하는 반원을 그렸을 때에도 가장 큰 반원의 넓이가 나머지 두 반원의 넓이의 합과 같은지 확인해 보자.

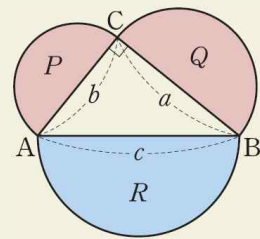
오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 지름으로 하는 반원을 그리고 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하자. 세 반원을 각각 P, Q, R라 하고 그 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$(P\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\frac{1}{8}b^2\pi$$

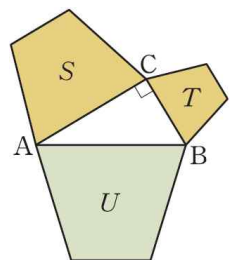
$$(Q\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{8}a^2\pi$$

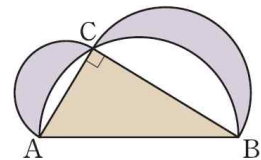
$$(R\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}c\right)^2=\frac{1}{8}c^2\pi$$

이때 $(P\text{의 넓이})+(Q\text{의 넓이})=\frac{1}{8}(a^2+b^2)\pi$이고, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여 $a^2+b^2=c^2$이므로 다음이 성립한다.

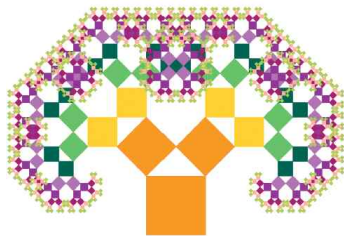
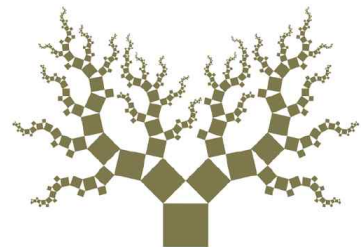
$$(P\text{의 넓이})+(Q\text{의 넓이})=(R\text{의 넓이})$$

활동 1

오른쪽 그림은 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 한 변으로 하는 세 개의 닮은 도형 S, T, U를 그린 것이다. 닮은 도형의 성질을 이용하여 다음이 성립함을 설명해 보자.

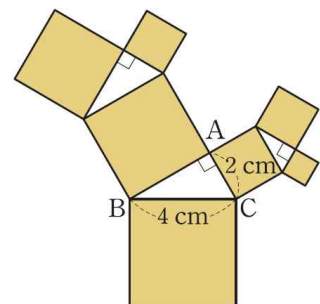
$$(S\text{의 넓이})+(T\text{의 넓이})=(U\text{의 넓이})$$

활동 2

고대 그리스의 수학자 히포크라테스(Hippocrates, B.C. 460?~B.C. 377?)는 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변을 각각 지름으로 하는 반원을 그리고, 빗변을 지름으로 하는 반원을 뒤집은 모양의 도형을 고안했다. 이때 뒤집은 반원과 다른 반원들이 겹치지 않은 부분이 초승달 같다고 하여 이것을 히포크라테스 초승달이라고 한다. 이 두 초승달 모양의 넓이의 합이 직각삼각형 ABC의 넓이와 같음을 설명해 보자.

아름다운 피타고라스 나무

직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 계속 이어 붙여 그린 것을 피타고라스 나무(Pythagoras tree)라고 한다. [그림 1]은 네덜란드의 전기 공학자이자 수학 교사인 보스만(Bosman, A. E., 1891~1961)이 1942년에 처음으로 그린 피타고라스 나무이다. 피타고라스 나무는 직각삼각형의 모양과 정사각형을 그리는 위치에 따라 [그림 2], [그림 3]과 같이 다양한 모양으로 만들 수 있다.

(출처: Bosman, A. E., 『The Wondrous Exploration Field of Plane Geometry』)

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

피타고라스 나무는 그 아름다움으로 인해 공원의 조형물이나 디자인 요소로 이용되기도 한다.

활동 1 오른쪽 그림은 $\overline{AC}=2\,\text{cm}$, $\overline{BC}=4\,\text{cm}$인 직각삼각형 ABC를 이용하여 피타고라스 나무를 그린 것이다. 색칠한 부분의 넓이를 구해 보자. (단, 세 직각삼각형은 모두 닮은 도형이다.)

중단원 마무리

Ⅶ-1 피타고라스 정리

스스로 완성해 봅시다

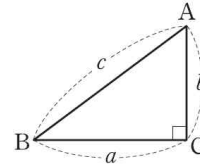
개념 다시 보기

❶ 피타고라스 정리

227쪽

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라고 하면

$\square = c^2$

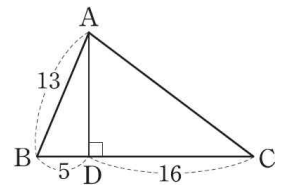
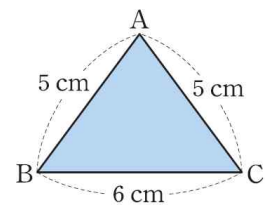
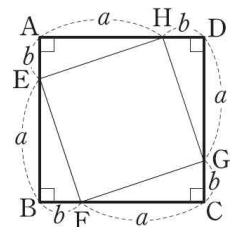
이 성립한다. 이것을 $\square$라고 한다.

❷ 직각삼각형이 되기 위한 조건

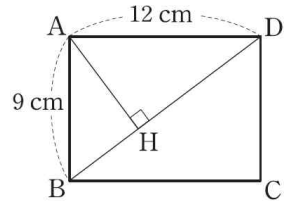
230쪽

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하면 이 삼각형은 빗변의 길이가 $\square$인 $\square$이다.

표준 문제

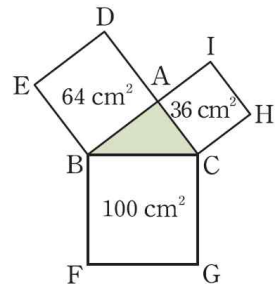
01 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$이고 $\overline{AB}=13$, $\overline{BD}=5$, $\overline{CD}=16$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하시오.

서술형

02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=5\,\text{cm}$이고 $\overline{BC}=6\,\text{cm}$인 이등변삼각형 ABC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

03 오른쪽 정사각형 ABCD에서 $a^2+b^2=49$일 때, 사각형 EFGH의 둘레의 길이를 구하시오.

문제 해결

04 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 9 cm 인 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{AH}$의 길이를 구하시오.

추론

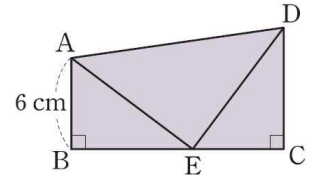
05 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변을 각각 한 변으로 하고 넓이가 각각 $64\,cm^2$, $100\,cm^2$, $36\,cm^2$인 세 정사각형이 있다. 이때 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

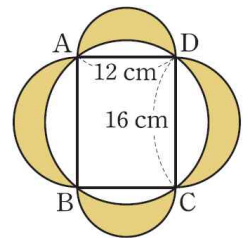
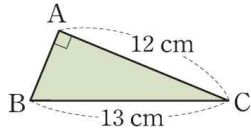
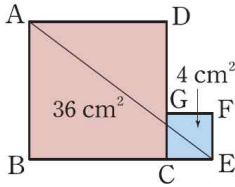
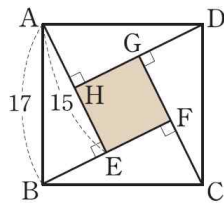
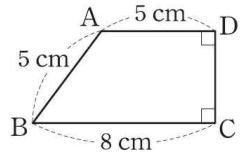
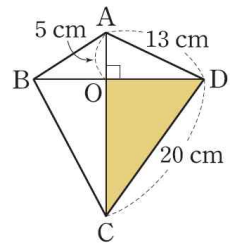
도전 문제

서술형

06 오른쪽 그림에서 삼각형 △ABE ≡ △ECD이고 세 점 B, E, C는 한 직선 위에 있다. $\overline{AB}=6\,cm$이고, 삼각형 AED의 넓이는 $50\,cm^2$일 때, 다음에 답하시오.

(1) $\overline{AE}$의 길이를 구하시오.

(2) $\overline{BE}$의 길이를 구하시오.

(3) 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하시오.

07 오른쪽 그림은 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 16 cm인 직사각형 ABCD의 각 변을 지름으로 하는 반원을 그린 후, 네 점 A, B, C, D를 지나는 원을 그린 것이다. 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

정답 및 풀이 303쪽

01 오른쪽 그림과 같이 $\angle A = 90°$이고 $\overline{BC} = 13\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 12\,\text{cm}$인 직각삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

02 오른쪽 그림과 같이 넓이가 $36\,\text{cm}^2$인 정사각형 ABCD와 넓이가 $4\,\text{cm}^2$인 정사각형 GCEF를 세 점 B, C, E가 한 직선 위에 있도록 이어 붙였을 때, $\overline{AE}$의 길이를 구하시오.

03 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 17인 정사각형 ABCD에서 네 개의 직각삼각형 ABE, BCF, CDG, DAH는 모두 합동이고 $\overline{AE} = 15$일 때, 사각형 EFGH의 넓이를 구하시오.

04 오른쪽 그림과 같이 $\angle C = \angle D = 90°$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB} = \overline{AD} = 5\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$일 때, $\overline{DC}$의 길이를 구하시오.

05 오른쪽 사각형 ABCD에서 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$이고 두 대각선의 교점을 O라고 하자. $\overline{AO} = 5\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 13\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 20\,\text{cm}$일 때, 삼각형 OCD의 넓이를 구하시오.

06 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 것을 보기에서 모두 고르시오.

보기

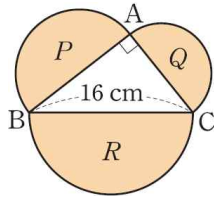
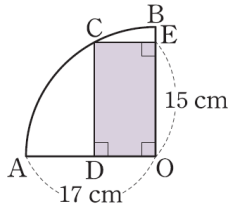
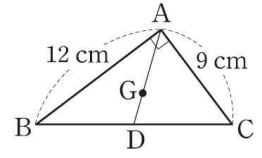
(ㄱ) 5 cm, 6 cm, 8 cm

(ㄴ) 9 cm, 12 cm, 15 cm

(ㄷ) 15 cm, 20 cm, 25cm

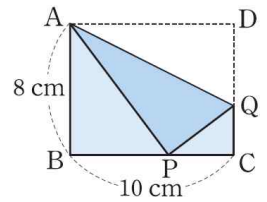
(ㄹ) 9 cm, 40 cm, 41 cm

서술형

07 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$이고 $\overline{BC}=16\,cm$인 직각삼각형 ABC의 각 변을 지름으로 하는 세 반원 P, Q, R의 넓이의 합을 구하시오.

08 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 17 cm인 사분원 위의 점 C에서 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자. $\overline{EO}=15\,cm$일 때, 직사각형 OECD의 넓이를 구하시오.

09 오른쪽 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC에서 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다. $\overline{AB}=12\,cm$, $\overline{AC}=9\,cm$일 때, $\overline{GD}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

10 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 10 cm, 8 cm인 직사각형 모양의 종이를 접어서 점 D가 선분 BC와 만나는 점을 P라고 할 때, 다음에 답하시오.

(1) $\overline{BP}$의 길이를 구하시오.

(2) $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오.

풀이

자기 평가

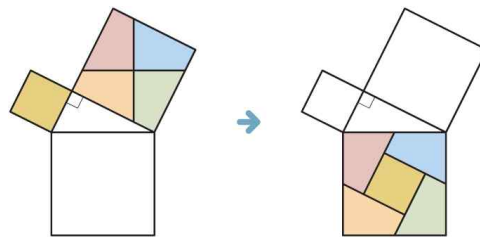
① 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.

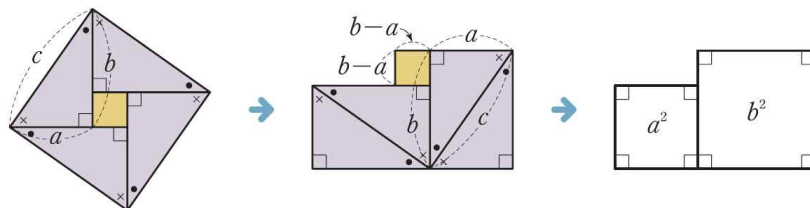
보충 계획

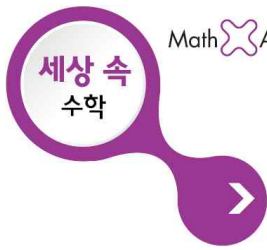
부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

여러 가지 방법으로 피타고라스 정리 설명하기

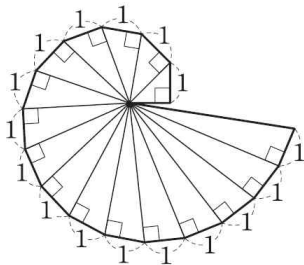
피타고라스 정리를 설명하는 방법은 360여 개에 이른다고 한다. 피타고라스 정리를 설명하는 대표적인 방법으로는 다음과 같은 방법들이 있다.

영국의 퍼즐 작가 듀드니(Dudeney, H. E., 1857~1930)는 다음과 같이 피타고라스 정리가 성립함을 설명하였다.

과제 1 색종이를 이용하여 위와 같은 활동을 해 보고 피타고라스 정리가 성립함을 확인해 보자.

인도의 수학자이자 천문학자인 바스카라(Bhaskara, A., 1114~1185(1193?))는 다음과 같이 합동인 직각삼각형 4개와 정사각형 1개를 이용하여 피타고라스 정리가 성립함을 설명하였다.

과제 2 바스카라의 방법으로 피타고라스 정리가 성립함을 설명해 보자.

과제 3 피타고라스 정리를 설명하는 다른 방법을 조사하여 발표해 보자.

우리 주변의 피타고라스 정리

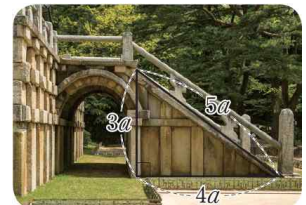
피타고라스 정리를 응용한 예술 작품, 건축물, 물건을 우리 주변 곳곳에서 찾아볼 수 있다. 피타고라스 정리는 건축물을 세울 때는 물론이고 직접 측정할 수 없는 거리를 계산하거나 건축물의 균형미를 살리는 데에도 이용된다.

[그림 1]과 같은 모양을 테오도로스 나선이라고 한다. 이는 고대 그리스의 수학자 테오도로스(Theodoros, B.C. 465?~B.C. 398?)가 그린 것으로 테오도로스는 피타고라스 정리를 이용하여 이 나선을 그리고 각 변의 길이를 나타내는 수에 대하여 연구하였다. 테오도로스 나선 모양은 달팽이 껍데기뿐만 아니라 건축물이나 예술 작품에서도 찾아볼 수 있다.

[그림 1]

달팽이 껍데기

나선형 계단

우리 조상들이 지은 건축물에서도 피타고라스 정리를 찾아볼 수 있는데 신라 시대의 건축물인 불국사가 대표적이다. 불국사의 백운교의 높이, 폭, 길이는 $3a$, $4a$, $5a$로 나타낼 수 있으므로 피타고라스 정리를 만족시킨다. 그 외에도 석굴암, 거북선에서도 피타고라스 정리를 찾아볼 수 있다고 한다.

(출처: 문화재청, 2017)

불국사의 백운교

건축가 | 예술적인 재능과 창의력으로 건축물을 설계하고 설계에 따라 건축물이 완성되는 전 과정을 감독한다.

VIII 확률

배운 내용 — 이 단원의 내용 — 배울 내용

배운 내용

초 5~6
- 가능성

중 수학 1
- 자료의 정리와 해석

이 단원의 내용

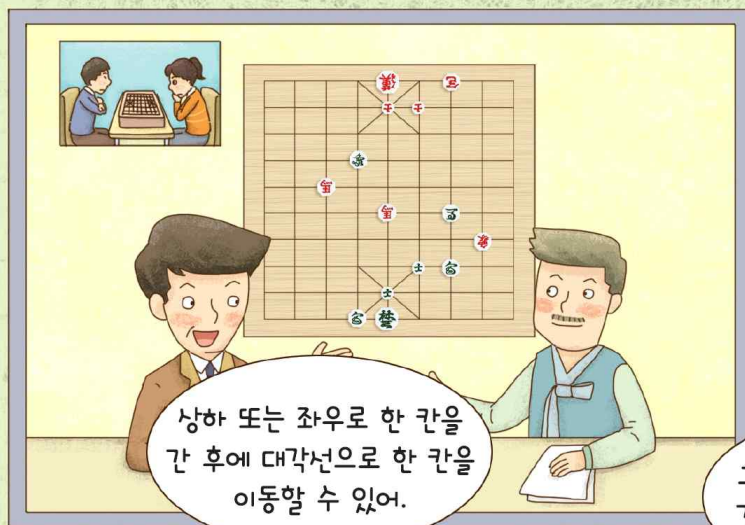
1 경우의 수
- 경우의 수

2 확률
- 확률
- 확률의 계산

배울 내용

중 수학 3
- 대푯값과 산포도
- 상관관계

고 수학
- 경우의 수
- 순열과 조합

'비가 올 가능성', '게임에서 이길 가능성' 등은 의사 결정에서 중요한 역할을 한다. 한 개의 주사위를 던질 때 1의 눈이 나올 가능성은 6의 눈이 나올 가능성과 같고, 2 이상의 눈이 나올 가능성보다 낮다. **어떤 일이 일어날 가능성**을 어떻게 수로 나타낼 수 있을까?
이 단원에서는 경우의 수와 각 가능성을 수로 나타내는 확률을 알아본다.

1 경우의 수

준비 학습

자료와 가능성

❶ 자연수 1, 2, 3을 한 번씩 사용하여 세 자리 수를 만들려고 한다. 만들 수 있는 세 자리 수의 가짓수를 구하시오.

자료와 가능성

❷ 1부터 20까지의 자연수 중에서 5의 배수는 모두 몇 개인지 구하시오.

경우의 수

경우의 수를 구할 수 있다.

사건과 경우의 수

현석이는 친구들과 함께 주사위를 이용한 보드게임을 하려고 한다.

탐구 ① 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 경우는 모두 몇 가지인지 말해 보자.

탐구 ② 한 개의 주사위를 던질 때, 5 이상의 눈이 나오는 경우는 모두 몇 가지인지 말해 보자.

위의 생각톡에서 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지이고 5 이상의 눈이 나오는 경우는 5, 6의 2가지이다.

한 개의 주사위를 던질 때, '짝수의 눈이 나온다.', '5 이상의 눈이 나온다.'처럼 동일한 조건에서 반복할 수 있는 실험이나 관찰의 결과를 **사건**이라고 한다. 이때 사건이 일어나는 경우의 가짓수를 경우의 수라고 한다.

사건	경우	경우의 수
짝수의 눈이 나온다.	⚁ ⚃ ⚅	3
5 이상의 눈이 나온다.	⚄ ⚅	2

문제 1 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 한 장의 카드를 뽑을 때, 다음 사건이 일어나는 경우의 수를 구하시오.

(1) 9의 약수가 적힌 카드가 나온다.

(2) 소수가 적힌 카드가 나온다.

사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수

푸드코트에 저녁을 먹으러 간 민서는 한식과 중식 중에서 음식을 주문하려고 한다. 이 푸드코트에서는 다음 차림표와 같이 한식 3종류와 중식 4종류를 판매한다.

탐구 ① 민서가 한식 중에서 한 가지를 주문하는 경우의 수를 구해 보자.

탐구 ② 민서가 중식 중에서 한 가지를 주문하는 경우의 수를 구해 보자.

탐구 ③ 민서가 한식 또는 중식 중에서 한 가지를 주문하는 경우의 수를 구해 보자.

위의 생각톡에서 민서가 한식 중에서 한 가지를 주문하는 경우는 3가지이고, 중식 중에서 한 가지를 주문하는 경우는 4가지이다.

음식을 한 가지 주문할 때 한식과 중식을 동시에 주문할 수 없으므로 한식 또는 중식 중에서 한 가지를 주문하는 경우의 수는

$$3+4=7$$

이다.

일반적으로 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

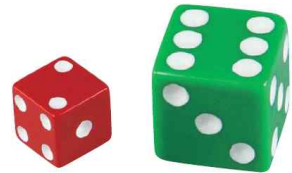
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

이다.

문제 2 어느 영화관에서는 액션 영화 2편, 코미디 영화 3편, 공포 영화 1편을 상영하고 있다. 인성이가 이 영화관에서 영화 한 편을 관람하려고 할 때, 인성이가 액션 영화 또는 코미디 영화를 선택하는 경우의 수를 구하시오.

문제 3 다음 표는 지수네 가족이 전주로 여행을 떠나기 위하여 전주행 기차와 고속버스의 출발 시각을 조사한 것이다. 지수네 가족이 기차 또는 고속버스를 이용하여 오전 10시 이전에 출발하는 경우의 수를 구하시오.

기차		고속버스	
	06:50		06:20
	08:30		08:00
	09:40		09:40
	10:50		11:20
	12:20		13:00
	15:30		14:40
			16:20

예제 1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 합이 3 또는 8이 되는 경우의 수를 구하시오.

풀이 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

눈의 수의 합이 3이 되는 경우는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2가지

눈의 수의 합이 8이 되는 경우는

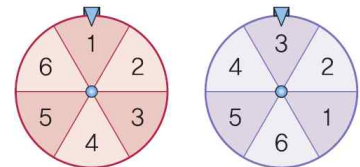
$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$의 5가지

눈의 수의 합이 3인 동시에 8일 수는 없으므로 구하는 경우의 수는

$$2+5=7$$

주사위 두 개가 서로 다르므로 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 1)$은 다른 경우이다.

답 7

문제 4 오른쪽 그림과 같이 6등분 한 서로 다른 원판 두 개에 1부터 6까지의 자연수가 각각 적혀 있다. 두 원판이 각각 돌다가 멈출 때, 두 원판의 각 바늘이 가리킨 수의 합이 4 또는 6이 되는 경우의 수를 구하시오.

(단, 바늘이 경계선을 가리키는 경우는 생각하지 않는다.)

오류 찾기

각 면에 1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 정이십면체를 던질 때, 3의 배수 또는 5의 배수가 나오는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음 수연이의 풀이 중에서 틀린 부분을 찾고, 그 이유를 말해 보자.

3의 배수가 나오는 경우는 6가지이고, 5의 배수가 나오는 경우는 4가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는 6+4=10

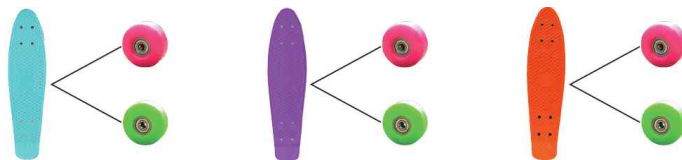
두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수

생각톡

승민이는 새로운 스케이트보드를 조립하기 위해 판과 바퀴를 구입하려고 한다. 승민이가 찾아간 스케이트보드 가게에는 3가지 종류의 판과 2가지 종류의 바퀴가 있다고 한다.

탐구 판과 바퀴를 각각 한 종류씩 선택하여 스케이트보드를 조립할 때, 승민이가 스케이트보드를 조립하는 경우의 수를 구해 보자.

위의 생각톡에서 스케이트보드를 조립할 때, 선택할 수 있는 판의 종류는 3가지이고, 그 각각에 대하여 선택할 수 있는 바퀴의 종류는 2가지이므로 스케이트보드를 조립하는 모든 경우는 다음과 같다.

두 사건이 동시에 일어나는 경우의 수를 구할 때, 나뭇가지 모양의 그림을 이용하면 편리하다.

따라서 판과 바퀴를 각각 한 종류씩 선택하여 스케이트보드를 조립하는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

이다.

일반적으로 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

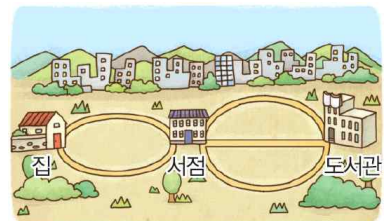
(두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

이다.

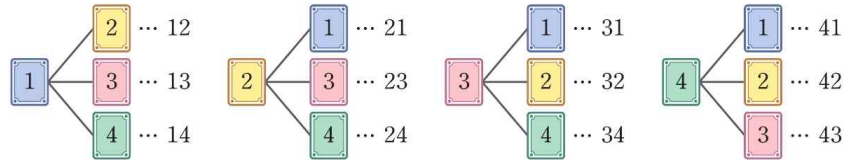
보기 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던지는 사건에서 주사위 A를 던질 때 나오는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이고, 그 각각에 대하여 주사위 B를 던질 때 나오는 눈의 수도 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이다.
따라서 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다.

A \ B	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

문제 5 영현이는 친구에게 줄 생일 선물을 포장하려고 한다. 5종류의 포장지와 4종류의 끈을 각각 한 가지씩 사용하여 포장하는 경우의 수를 구하시오.

문제 6 윤지네 집에서 서점까지 가는 길은 2가지이고, 서점에서 도서관까지 가는 길은 3가지이다. 윤지가 집에서 출발하여 서점을 거쳐 도서관까지 가는 경우의 수를 구하시오.
(단, 한 번 지나간 지점은 다시 지나가지 않는다.)

예제 2

1부터 4까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 4장의 카드가 있다. 이 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수를 구하시오.

풀이 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 십의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이다.

따라서 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는 $4 \times 3 = 12$

답 12

문제 7

0부터 4까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 두 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하시오.

(1) 두 자리 자연수의 개수

(2) 두 자리 자연수 중 홀수의 개수

확인하기

1 주머니 속에 1부터 15까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 15개의 구슬이 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 소수 또는 4의 배수가 적힌 구슬이 나오는 경우의 수를 구하시오.

2 어느 독서 동아리에서는 준수, 민아, 건우, 지효, 선미 중에서 대표를 뽑으려고 한다. 5명의 후보 중에서 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수를 구하시오.

오른쪽 그림과 같이 4개의 계단이 있는 층계가 있다. 한 걸음에 한 계단 또는 두 계단을 오른다고 할 때, 지면에서부터 시작하여 네 번째 계단까지 오르는 모든 경우의 수를 구하시오.

마음대로 나누어 갖기

문제 해결 추론

2명이 서로 다른 포토 카드 한 장씩을 상자에 넣고 뽑을 때, 어느 누구도 자기 자신의 포토 카드를 갖지 못하는 경우는 둘의 포토 카드가 바뀌는 경우뿐이다.

3명이 서로 다른 포토 카드 한 장씩을 상자에 넣고 뽑을 때, 어느 누구도 자기 자신의 포토 카드를 갖지 못하는 경우의 수는 얼마일까?

A, B, C의 3명이 서로 다른 포토 카드 한 장씩을 상자에 넣고 뽑을 때, 가능한 경우는 다음 6가지이다.

A	B	C
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

이때 A가 자기 자신의 포토 카드를 갖는 경우 2가지와 A가 B 또는 C의 포토 카드를 갖는 경우 중 각각 B, C가 자기 자신의 포토 카드를 갖는 경우 1가지씩을 제외하면 어느 누구도 자기 자신의 포토 카드를 갖지 못하는 경우는 2가지이다.

활동 1 위와 같은 방법을 이용하여 4명이 서로 다른 포토 카드 한 장씩을 상자에 넣고 뽑을 때, 어느 누구도 자기 자신의 포토 카드를 갖지 못하는 경우의 수를 구해 보자.

활동 2 5명이 서로 다른 포토 카드 한 장씩을 상자에 넣고 뽑을 때, 어느 누구도 자기 자신의 포토 카드를 갖지 못하는 경우의 수는 4의 배수이다. 그 이유를 추측해 보자.

중단원 마무리

Ⅷ-1 경우의 수

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 경우의 수 243쪽

(1) ☐: 동일한 조건에서 반복할 수 있는 실험이나 관찰의 결과

(2) 경우의 수: 사건이 일어나는 경우의 가짓수

❷ 여러 가지 경우의 수 244쪽

(1) 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)=☐

(2) 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면

(두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수)=☐

표준 문제

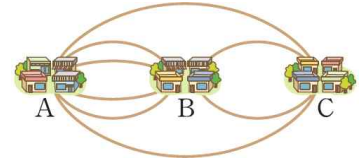
01 현지는 500원짜리 동전 4개와 100원짜리 동전 10개를 가지고 있다. 이 동전으로 2000원짜리 공책 한 권을 사려고 할 때, 공책값을 지불하는 경우의 수를 구하시오.

02 어느 편의점에서는 5종류의 샌드위치와 3종류의 삼각김밥을 판매하고 있다. 재훈이가 이 편의점에서 샌드위치 또는 삼각김밥 중에서 한 개를 사는 경우의 수를 구하시오.

03 A 상자에는 숫자 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, B 상자에는 숫자 0, 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. A, B 두 상자에서 각각 한 개의 공을 꺼낼 때, 두 공에 적힌 수의 합이 5 또는 6인 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

04 어느 미술관에는 4개의 출입구가 있다. 이 중 한 출입구로 들어왔다가 다른 출입구로 나가려고 할 때, 미술관에 들어왔다가 나가는 경우의 수를 구하시오.

문제 해결

05 오른쪽 그림과 같이 A, B, C 세 마을을 연결하는 도로가 있다. 이때 A마을에서 출발하여 C마을까지 가는 경우의 수를 구하시오.
(단, 한 번 지나간 마을은 다시 지나가지 않는다.)

06 부산에서 제주를 오가는 교통편으로 비행기는 6가지, 배는 3가지가 있다고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 부산에서 제주로 가는데 비행기 또는 배를 이용하는 경우의 수를 구하시오.
(2) 부산에서 제주를 왕복하는데 갈 때는 배를 이용하고, 올 때는 비행기를 이용하는 경우의 수를 구하시오.
(3) 부산에서 제주를 비행기로만 왕복하는 경우의 수를 구하시오.

도전 문제

추론

07 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 만들 수 있는 두 자리 자연수 중 10번째로 큰 수를 구하시오.

서술형

08 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, $a+b$의 값이 짝수인 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

2 확률

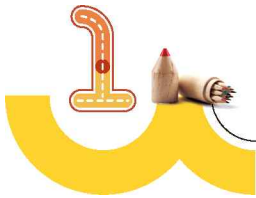
준비 학습

가능성

❶ 동전 한 개를 던질 때, 앞면이 나올 가능성을 수로 나타내시오.

상대도수

❷ 오른쪽은 진서네 반 학생 25명의 일주일 동안의 운동 시간을 조사하여 나타낸 표이다. A, B의 값을 구하시오.

운동 시간 (시간)	도수 (명)	상대도수
0이상 ~ 1미만	3	A
1 ~ 2	4	
2 ~ 3	6	
3 ~ 4	5	B
4 ~ 5	7	
합계	25	1

확률

확률의 개념과 그 기본 성질을 이해한다.

확률

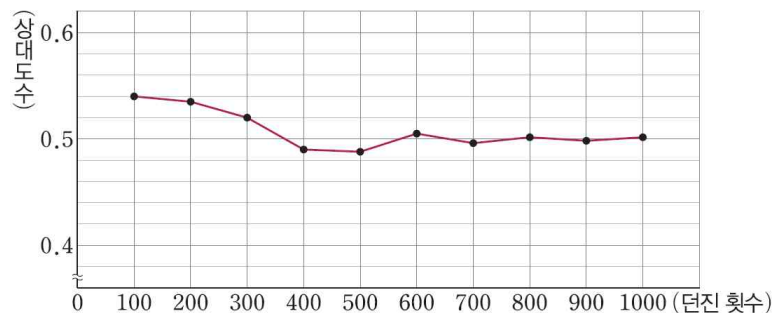
한 개의 동전을 여러 번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 관찰하는 실험을 해 보자.

탐구 ① $(\text{상대도수}) = \dfrac{(\text{앞면이 나온 횟수})}{(\text{던진 횟수})}$ 일 때, 실험한 결과를 이용하여 다음 표를 완성해 보자.

던진 횟수 (회)	10	50	100	150	200
앞면이 나온 횟수 (회)					
상대도수					

탐구 ② 동전을 던진 횟수가 많아질수록 앞면이 나오는 횟수의 상대도수는 어떤 값에 가까워지는지 추측해 보자.

다음은 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던졌을 때, 앞면이 나온 횟수를 조사하여 그 상대도수를 표와 그래프로 나타낸 것이다.

던진 횟수	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수	54	107	156	196	244	303	347	401	449	501
상대도수	0.54	0.535	0.52	0.49	0.488	0.505	0.496	0.501	0.499	0.501

위의 그래프에서 동전을 던진 횟수가 많아질수록 앞면이 나오는 횟수의 상대도수는 일정한 값 0.5에 가까워짐을 알 수 있다.

파스칼(Pascal, B., 1623~1662)은 확률 이론을 본격적으로 발전시켰다.

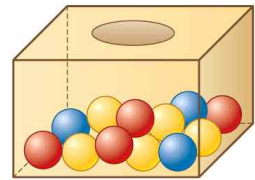
상대도수가 가까워지는 값인 0.5는 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 한 개를 던졌을 때, $\frac{(\text{앞면이 나오는 경우의 수})}{(\text{동전을 던져 나오는 모든 경우의 수})}$ 와 같다.

일반적으로 각 경우가 일어날 가능성이 모두 같은 어떤 실험이나 관찰을 여러 번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 상대도수가 일정한 값에 가까워지면 이 일정한 값은 일어나는 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비율과 같다.

확률은 보통 영어 단어 probability의 첫 글자 p로 나타낸다.

이때 일어나는 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비율을 사건 A가 일어날 **확률**이라고 하고, 사건 A가 일어날 확률 p는 다음과 같다.

$$p=\frac{(\text{사건 }A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어나는 모든 경우의 수})}$$

예제 1 상자 속에 모양과 크기가 같은 빨간 공 4개, 파란 공 3개, 노란 공 5개가 들어 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 파란 공이 나올 확률을 구하시오.

$\frac{3}{12}$ (3 ← 파란 공이 나오는 경우의 수, 12 ← 일어나는 모든 경우의 수)

풀이 일어나는 모든 경우의 수는 12이고, 이 중에서 파란 공이 나오는 경우의 수는 3이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

문제 1 태양계 행성과 그 표면 온도가 하나씩 적힌 8장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 표면 온도가 영하인 행성의 카드가 뽑힐 확률을 구하시오.

예제 2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 10일 확률을 구하시오.

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

이고, 두 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는

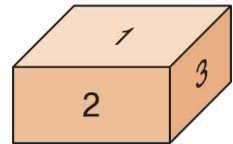
(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

이다. 따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

답 $\frac{1}{12}$

문제 2 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 두 자리 자연수를 만들 때, 그 자연수가 짝수일 확률을 구하시오.

오른쪽 그림과 같이 각 면에 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 직육면체가 있다. 이 직육면체를 던졌을 때, 1이 나올 확률을 $\frac{1}{6}$이라고 할 수 있는지 친구들과 토론해 보자.

확률의 기본 성질

다음과 같은 세 사건 A, B, C가 있다.

사건 A 8개의 제비 중 당첨 제비가 3개 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비를 뽑는 사건

사건 B 한 개의 동전을 던질 때, 앞면 또는 뒷면이 나오는 사건

사건 C 노란 공만 5개 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 뽑을 때, 빨간 공을 뽑는 사건

탐구 ① 절대로 일어나지 않는 사건을 찾고 그 사건이 일어날 확률을 말해 보자.

탐구 ② 반드시 일어나는 사건을 찾고 그 사건이 일어날 확률을 말해 보자.

한 개의 주사위를 던질 때 일어나는 모든 경우는 6가지이고, 4의 약수의 눈이 나오는 경우는 3가지이므로 4의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

이다. 또 7 이상의 눈이 나오는 경우는 없으므로 7 이상의 눈이 나올 확률은

$$\frac{0}{6}=0$$

이다. 한편 6 이하의 눈이 나오는 경우는 6가지이므로 6 이하의 눈이 나올 확률은

$$\frac{6}{6}=1$$

이다.

일반적으로 어떤 사건이 일어날 확률은 0보다 크거나 같고 1보다 작거나 같다. 특히 절대로 일어나지 않는 사건의 확률은 0이고, 반드시 일어나는 사건의 확률은 1이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

❶ 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 $0 \le p \le 1$이다.
❷ 절대로 일어나지 않는 사건의 확률은 0이다.
❸ 반드시 일어나는 사건의 확률은 1이다.

문제 3 주머니 속에 모양과 크기가 같은 오렌지 맛 젤리 2개, 포도 맛 젤리 6개가 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 젤리를 꺼낼 때, 다음을 구하시오.

(1) 오렌지 맛 젤리를 꺼낼 확률
(2) 사과 맛 젤리를 꺼낼 확률
(3) 과일 맛 젤리를 꺼낼 확률

찾아보기 우리 주변에서 확률이 0인 사건과 1인 사건의 예를 찾아보자.

예 오늘이 월요일이므로 내일이 토요일일 확률은 0이다.
주사위를 던졌을 때 6 이하의 눈이 나올 확률은 1이다.

어떤 사건이 일어나지 않을 확률

1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드가 있다.

탐구 ① 한 장의 카드를 뽑을 때, 3의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구해 보자.

탐구 ② 한 장의 카드를 뽑을 때, 3의 배수가 적힌 카드가 나오지 않을 확률을 구해 보자.

위의 에서 카드에 적힌 수가 3의 배수인 경우는 3, 6, 9의 3가지이므로 한 장의 카드를 뽑을 때, 3의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{3}{10}$이다.

이때 카드에 적힌 수가 3의 배수가 아닌 경우는 $10-3=7$ (가지)이므로

$$(3\text{의 배수가 적힌 카드가 나오지 않을 확률})=\frac{7}{10}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}&(3\text{의 배수가 적힌 카드가 나오지 않을 확률})\\&=\frac{7}{10}\\&=\frac{10-3}{10}\\&=1-\frac{3}{10}\\&=1-(3\text{의 배수가 적힌 카드가 나올 확률})\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 어떤 사건이 일어나지 않을 확률은 다음과 같다.

어떤 사건이 일어날 확률과 그 사건이 일어나지 않을 확률의 합은 1이다.

어떤 사건이 일어나지 않을 확률

사건 A가 일어날 확률이 p일 때,

(사건 A가 일어나지 않을 확률)$=1-p$

문제 4 어느 날 비가 올 확률이 0.7이라고 할 때, 그날 비가 오지 않을 확률을 구하시오.

예제 3 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 적어도 하나는 앞면이 나올 확률을 구하시오.

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때 일어나는 모든 경우는 다음과 같다.

풀이 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

이고, 적어도 하나는 앞면이 나오는 경우는 모두 뒷면이 나오는 경우를 제외한 경우이다.

동전이 모두 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

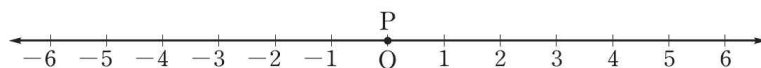
문제 5 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 적어도 하나는 2 이상의 눈이 나올 확률을 구하시오.

확인하기

1 다음은 민수네 반 학생 24명의 혈액형을 조사하여 나타낸 표이다. 민수네 반 학생 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 A형일 확률을 구하시오.

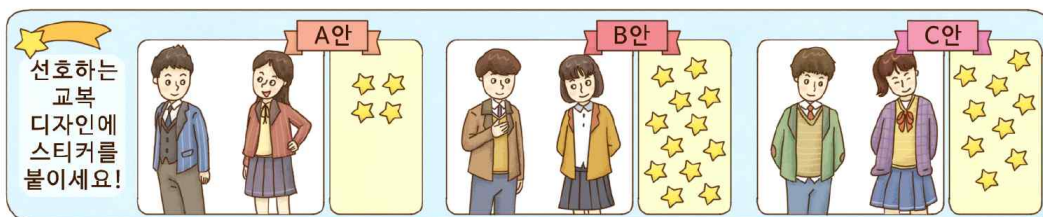
혈액형	A형	B형	O형	AB형
학생 수 (명)	8	9	4	3

2 수영이네 반 학생 28명 중에서 안경을 쓴 학생은 모두 9명이다. 수영이네 반 학생 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 안경을 쓰지 않은 학생이 뽑힐 확률을 구하시오.

사고력+ 다음 그림과 같이 수직선 위를 움직이는 점 P가 원점에 있다. 주사위 한 개를 던져서 짝수의 눈이 나오면 왼쪽으로 그 눈의 수의 $\frac{1}{2}$만큼, 홀수의 눈이 나오면 오른쪽으로 그 눈의 수만큼 점 P를 움직이기로 하였다. 주사위를 2번 던졌을 때, 점 P가 원점에 있을 확률을 구하시오.

확률의 계산

여러 가지 사건이 일어날 확률을 구할 수 있다.

사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률

다음은 태성이네 반 학생 25명이 세 가지 교복 디자인 중 가장 선호하는 것을 하나씩 선택하여 스티커를 붙인 것이다.

탐구 ① 한 명의 학생을 임의로 뽑을 때, B안을 선택한 학생이 뽑힐 확률과 C안을 선택한 학생이 뽑힐 확률을 각각 구해 보자.

탐구 ② 한 명의 학생을 임의로 뽑을 때, B안 또는 C안을 선택한 학생이 뽑힐 확률을 구해 보자.

위의 에서 B안을 선택한 학생은 12명이고 C안을 선택한 학생은 9명이다. 이때 두 가지를 동시에 선택할 수 없으므로 B안 또는 C안을 선택한 학생은 $12+9=21$ (명)이다. 따라서 B안 또는 C안을 선택한 학생이 뽑힐 확률은

$$\frac{21}{25}$$

이다. 이 값은 한 명의 학생을 임의로 뽑을 때 B안을 선택한 학생이 뽑힐 확률 $\frac{12}{25}$와 C안을 선택한 학생이 뽑힐 확률 $\frac{9}{25}$의 합과 같다. 즉

$$\frac{21}{25}=\frac{12}{25}+\frac{9}{25}$$

이다.

일반적으로 동시에 일어나지 않는 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률

동일한 실험이나 관찰에서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면

$$(\text{사건 } A \text{ 또는 사건 } B\text{가 일어날 확률})=p+q$$

문제 1

2014년 브라질 월드컵 본선에 진출한 32개국은 최종 성적에 따라 다음과 같이 상금을 받았다고 한다. 본선에 진출한 32개국 중에서 임의로 한 나라를 선택할 때, 선택한 나라가 받은 상금이 1000만 달러 미만 또는 3000만 달러 이상일 확률을 구하시오.

최종 성적	우승	준우승	3위	4위	8강	16강	16강 탈락
상금 (만 달러)	3500	2500	2200	2000	1400	900	800
팀 개수	1	1	1	1	4	8	16

(출처: FIFA, 2017)

문제 2

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드가 있다. 이 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 만든 두 자리 자연수가 20 이하이거나 60 이상일 확률을 구하시오.

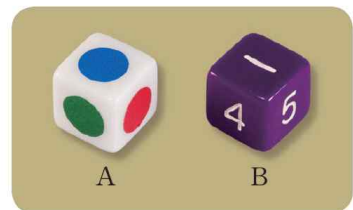
적용하기

윤서와 도현이는 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 합이 5 또는 8이면 윤서가 이기고, 3 또는 10이면 도현이가 이기는 것으로 정하고 내기를 하였다.

① 두 사람이 하는 내기가 공평한지 이야기해 보자.
② 만약 공평하지 않다면 규칙을 어떻게 바꾸어야 좋은지 이야기해 보자.

두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률

생각톡

각 면에 빨강, 파랑, 초록, 노랑, 주황, 보라의 6가지 색의 원이 각각 하나씩 표시된 정육면체 A와 각 면에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 정육면체 B가 있다.

탐구 ① 정육면체 A를 던졌을 때, 빨간색 원이 나올 확률을 구해 보자.

탐구 ② 정육면체 B를 던졌을 때, 짝수가 나올 확률을 구해 보자.

탐구 ③ 두 개의 정육면체 A, B를 동시에 던졌을 때, 정육면체 A는 빨간색 원이 나오고 정육면체 B는 짝수가 나올 확률을 구해 보자.

위의 생각톡에서 정육면체 A를 던졌을 때 빨간색 원이 나오는 경우는 1가지이고, 정육면체 B를 던졌을 때 짝수가 나오는 경우는 3가지이다. 따라서 정육면체 A는 빨간색 원이 나오고 정육면체 B는 짝수가 나오는 경우의 수는 $1\times3=3$이다.

또한 두 개의 정육면체 A, B를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$이므로 정육면체 A는 빨간색 원이 나오고 정육면체 B는 짝수가 나올 확률은

$$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

이다. 이 값은 정육면체 A를 던졌을 때 빨간색 원이 나올 확률 $\frac{1}{6}$과 정육면체 B를 던졌을 때 짝수가 나올 확률 $\frac{1}{2}$의 곱과 같다. 즉

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$$

이다.

일반적으로 서로 영향을 끼치지 않는 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

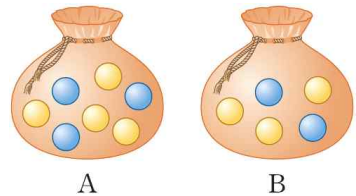
두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률

두 사건 A, B가 서로 영향을 끼치지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면

$$(\text{두 사건 } A\text{와 } B\text{가 동시에 일어날 확률})=p\times q$$

예제 1 A주머니에는 모양과 크기가 같은 파란 구슬 3개, 노란 구슬 4개가 들어 있고, B주머니에는 모양과 크기가 같은 파란 구슬 2개, 노란 구슬 3개가 들어 있다. 두 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 두 구슬이 모두 파란 구슬일 확률을 구하시오.

A

B

풀이 A주머니에 들어 있는 구슬은 모두 7개이고, 이 중 파란 구슬은 3개이므로 A주머니에서 파란 구슬이 나올 확률은 $\frac{3}{7}$이다.

B주머니에 들어 있는 구슬은 모두 5개이고, 이 중 파란 구슬은 2개이므로 B주머니에서 파란 구슬이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$$

답 $\frac{6}{35}$

문제 3 어느 중학교의 수학 동아리는 도희를 포함한 여학생 8명과 준용이를 포함한 남학생 5명으로 이루어져 있다. 수학 체험 축제에 학생 자원봉사 요원으로 참가할 여학생 1명과 남학생 1명을 임의로 뽑을 때, 도희와 준용이가 뽑힐 확률을 구하시오.

문제 4 두 볼링 선수 A, B가 스트라이크를 칠 확률은 각각 0.9, 0.8이라고 한다. 두 선수가 모두 한 번씩 볼링공을 던질 때, 적어도 한 선수가 스트라이크를 칠 확률을 구하시오.

볼링에서 스트라이크는 한 번에 모든 핀을 쓰러뜨리는 것을 말한다.

오류 찾기

다음은 일기 예보를 보고 동준이가 말한 것이다. 동준이의 말이 옳은지 친구와 이야기해 보고, 옳지 않다면 그 이유를 말해 보자.

확인하기

1 한 개의 주사위를 던질 때, 2 이하 또는 4 초과의 눈이 나올 확률을 구하시오.

2 A상자에 들어 있는 14개의 제비 중 당첨 제비는 5개이고, B상자에 들어 있는 10개의 제비 중 당첨 제비는 4개이다. 두 상자에서 각각 한 개의 제비를 임의로 꺼낼 때, A상자에서는 당첨 제비가 나오고 B상자에서는 당첨 제비가 나오지 않을 확률을 구하시오.

선생님의 자녀는 남자일까 여자일까

우리 반 선생님의 자녀는 2명이다. 어느 날 우연히 자녀 2명 중 한 명이 여자라는 것을 알게 되었다. 이때 나머지 한 명이 남자일 확률은 얼마일까?

자녀가 2명일 때 첫째와 둘째의 성별을 나타내면 다음 그림과 같이 4가지 경우이다. 이때 우연히 자녀 2명 중 1명이 여자라는 것을 알게 되면 4가지 경우 중 모두 남자인 경우는 제외할 수 있다.

활동 1 우연히 자녀 2명 중 한 명이 여자라는 것을 알았다. 이때 나머지 한 명이 남자일 확률과 여자일 확률을 각각 구해 보자.

활동 2 서로 다른 두 개의 동전 A, B를 동시에 던졌을 때, 우연히 그중 하나가 앞면이라는 것을 알았다. 이때 나머지 하나의 동전이 앞면일 확률과 뒷면일 확률을 각각 구해 보자.

앞면	앞면
A	B

앞면	뒷면
A	B

뒷면	앞면
A	B

뒷면	뒷면
A	B

정답 및 풀이 305쪽

중단원 마무리

Ⅷ-2 확률

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 확률

254쪽

(1) 어떤 실험이나 관찰에서 각 경우가 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률 p는

$$p=\frac{(\boxed{\quad})}{(\boxed{\quad})}$$

(2) 확률의 기본 성질

① 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 $\square \le p \le \square$이다.

② 절대로 일어나지 않는 사건의 확률은 $\square$이다.

③ 반드시 일어나는 사건의 확률은 $\square$이다.

(3) 사건 A가 일어날 확률이 p일 때,

(사건 A가 일어나지 않을 확률)$=\boxed{\quad}$

❷ 확률의 계산

259쪽

(1) 동일한 실험이나 관찰에서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면

(사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률)$=\boxed{\quad}$

(2) 두 사건 A와 B가 서로 영향을 끼치지 않을 때, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면

(두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률)$=\boxed{\quad}$

표준 문제

01 진희와 경수가 가위바위보를 한 번 할 때, 진희가 이길 확률을 구하시오.

02 주머니 속에 모양과 크기가 같은 흰 구슬 2개, 빨간 구슬 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때 흰 구슬이 나올 확률이 $\frac{1}{5}$이 되도록 하려면 빨간 구슬을 몇 개 더 넣어야 하는지 구하시오.

03 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 두 자리 자연수를 만들 때, 다음에 답하시오.

(1) 만들어지는 자연수가 홀수일 확률을 구하시오.

(2) 만들어지는 자연수가 11의 배수일 확률을 구하시오.

04 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 10 이하일 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결

05 A, B 두 사람이 10층짜리 건물 1층에서 서로 다른 엘리베이터를 탔다. 두 사람은 각각 2층에서 10층까지 중 한 층에서 내릴 때, 두 사람이 서로 다른 층에서 내릴 확률을 구하시오.

06 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 2장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 만든 두 자리 자연수가 7의 배수 또는 8의 배수일 확률을 구하시오.

07 100원짜리 동전 한 개와 각 면에 1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 정팔면체 한 개를 동시에 던질 때, 동전은 뒷면이 나오고 정팔면체는 6보다 큰 수가 나올 확률을 구하시오.

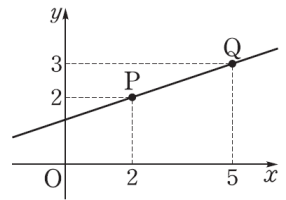
서술형 **08** 두 상자 A, B에 자연수가 하나씩 적힌 공 여러 개가 각각 들어 있다. 두 상자 A, B에서 각각 한 개의 공을 뽑을 때, 짝수가 적힌 공이 뽑힐 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$이라고 한다. 두 상자 A, B에서 각각 한 개의 공을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(단, 공의 모양과 크기는 같다.)

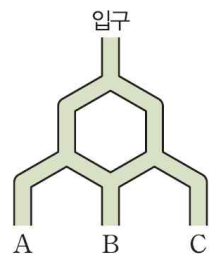
(1) 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률

(2) 공에 적힌 두 수의 곱이 짝수일 확률

도전 문제

추론 **09** 오른쪽 그림과 같이 두 점 P(2, 2), Q(5, 3)을 지나는 직선이 있다. 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 직선 $y=\frac{b}{a}x$가 직선 PQ와 만날 확률을 구하시오.

서술형 **10** 각 면에 -2, -2, 1, 2, 2, 2가 각각 하나씩 적힌 정육면체를 두 번 던져서 나온 수의 합이 0이 될 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

11 오른쪽 그림과 같이 입구에 공을 넣으면 아래쪽으로만 이동하여 A, B, C 중 어느 한 곳으로 공이 나오는 관이 있다. 입구에 공을 하나 넣었을 때, 공이 B로 나올 확률을 구하시오. (단, 각 갈림길에서 공이 오른쪽이나 왼쪽으로 이동할 확률은 같다.)

정답 및 풀이 306쪽

01 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 차가 3이 되는 경우의 수를 구하시오.

02 서희네 학교에서는 운동 동아리 4개와 취미 활동 동아리 5개가 있다. 서희가 운동 동아리 또는 취미 활동 동아리 중에서 한 가지를 선택하는 경우의 수를 구하시오.

03 자음 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이 각각 하나씩 적힌 카드 4장과 모음 ㅏ, ㅗ가 각각 하나씩 적힌 카드 2장이 있다. 자음과 모음이 적힌 카드를 각각 한 장씩 뽑아 만들 수 있는 글자의 개수를 구하시오.

04 민호네 집에서 뒷산에 있는 약수터까지 가는 길은 8가지가 있다고 한다. 민호네 집에서 출발하여 약수터에 갔다가 다른 길로 집에 돌아오는 경우의 수를 구하시오.

05 아래 차림표를 보고 주문을 하려고 할 때, 다음 사건이 일어나는 경우의 수를 구하시오.

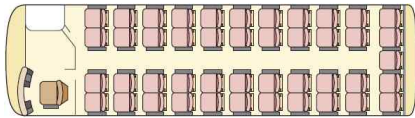
차림표

과일 주스	빙수	케이크
딸기 주스	팥빙수	생크림 케이크
바나나 주스	녹차 빙수	초콜릿 케이크
청포도 주스	망고 빙수	치즈 케이크
키위 주스		

(1) 과일 주스 또는 빙수 중 하나를 주문한다.
(2) 과일 주스와 케이크를 하나씩 주문한다.

06 0, 1, 2, 3, 4, 5가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드 중에서 3장의 카드를 한 장씩 차례대로 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수 중 5의 배수의 개수를 구하시오.

07 현우네 동아리 회원 45명은 다음 그림과 같은 45인승 버스를 타고 현장 학습을 가려고 한다. 제비뽑기를 해서 버스의 좌석을 정한다고 할 때, 현우가 가장 뒷줄에 앉게 될 확률을 구하시오.

(단, 회원들이 앉을 수 있는 좌석은 45개이다.)

08 A주머니에는 1부터 4까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, B주머니에는 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있다. 두 주머니에서 임의로 각각 한 장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 두 수의 곱이 12일 확률을 구하시오.

09 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, 다음에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

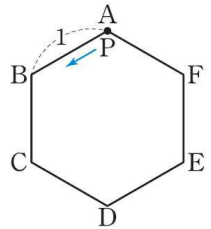
① 각 경우가 일어날 가능성이 모두 같을 때, p는 $\dfrac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어나는 모든 경우의 수})}$이다.

② p의 값의 범위는 $0 \le p \le 1$이다.

③ 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $p-1$이다.

④ 반드시 일어나는 사건의 확률은 1이다.

⑤ 절대로 일어나지 않는 사건의 확률은 0이다.

10 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형의 꼭짓점 A에 점 P가 있다. 점 P는 주사위를 던질 때 나오는 눈의 수만큼의 길이를 정육각형의 변을 따라 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 움직인다. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 점 P가 꼭짓점 F에 놓일 확률을 구하시오.

11 명중률이 각각 0.8, 0.7인 두 명의 사격 선수가 각각 한 발씩 표적에 사격을 할 때, 적어도 한 명은 명중할 확률을 구하시오.

12 A상자에는 흰 공 4개, 검은 공 1개가 들어 있고, B상자에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 두 상자에서 각각 한 개의 공을 뽑을 때, 흰 공과 검은 공이 한 개씩 뽑힐 확률을 구하시오.

(단, 공의 모양과 크기는 같다.)

서술형

13 오른쪽 그림은 어떤 승용차의 번호판이다. 맨 끝의 네 개의 숫자 중에서 첫 번째 숫자와 세 번째 숫자는 각각 7, 4이고, 비어 있는 부분의 숫자는 각각 0부터 9까지의 숫자가 사용된다고 할 때, 이 승용차의 번호판으로 가능한 모든 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

22누 7□4□

풀이

14 1부터 100까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 100장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑아 나온 수를 210으로 나눌 때, 그 수가 유한소수가 아닐 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 일차방정식 $ax-b=0$의 해가 $x=2$ 또는 $x=3$일 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 어느 지역의 일기 예보에 따르면 이번 주 목요일에 비가 올 확률은 $\frac{1}{4}$, 금요일에 비가 올 확률은 $\frac{2}{5}$라고 한다. 이 지역에 이번 주 목요일과 금요일 중 하루만 비가 올 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

❶ 경우의 수를 구할 수 있다.

❷ 확률의 개념과 그 기본 성질을 이해한다.

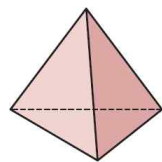
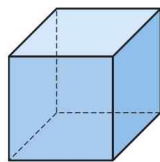
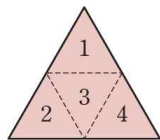
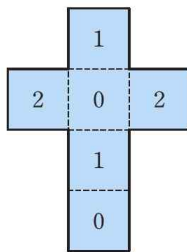
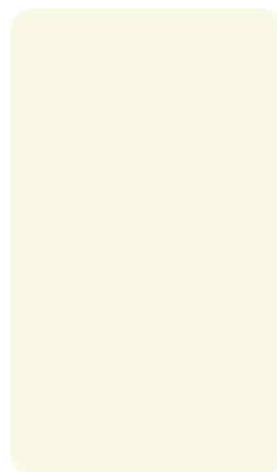
❸ 여러 가지 사건이 일어날 확률을 구할 수 있다.

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

주사위로 경품 당첨자 정하기

서진이네 학교에서 축제를 개최하는데 2학년 학생을 대상으로 경품 추첨 행사를 하기 위해 다면체 주사위를 만들려고 한다. 2학년은 총 4개의 학급이 있고, 각 학급에는 최대 29명의 학생이 있다. 다음 조건을 만족시키는 다면체를 만들어 한 명의 경품 당첨자를 정하려고 한다.

❶ 다면체 A는 반을 결정한다.
❷ 다면체 B와 다면체 C는 각각 학급 번호의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 결정한다.

예를 들어 세 다면체 A, B, C를 던졌을 때 나온 숫자가 각각 4, 1, 2이면 경품 당첨자는 '2학년 4반 12번' 학생이다. 아래 그림은 서진이가 조건에 알맞은 다면체를 만들기 위해서 세 다면체 A, B, C의 모양과 전개도를 나타내는 과정이다.

과제 1 서진이가 만든 다면체 B는 우리가 알고 있는 주사위와 다르다. 다면체 B는 공정한 주사위인지 말하고 그 이유를 설명해 보자.

과제 2 모든 학생의 당첨 확률이 같도록 하려면 다면체 C는 어떤 모양이어야 하는지 말하고 그 이유를 설명해 보자.

과제 3 주사위의 유래와 역사 속의 주사위를 조사하여 발표해 보자.

인공 지능과 확률

인공 지능(Artificial Intelligence)이란 인간의 지능으로 할 수 있는 사고, 학습, 추리 등의 기능을 갖춘 컴퓨터 시스템을 말하는 것으로 컴퓨터가 인간의 지능적인 행동을 따라 하여 컴퓨터 스스로 문제를 해결할 수 있도록 만든 기술이다.

바둑은 경우의 수가 매우 많고 복잡하여 인공 지능 연구자들의 도전의 대상이 되어 왔다. 바둑판은 19개의 가로줄과 세로줄로 만들어진 격자 모양으로 $19 \times 19 = 361$ (가지)의 첫 수가 가능하고 그다음 수는 360가지, 또 그다음 수는 359가지, ⋯ 이므로 바둑에서 경우의 수는 엄청나게 늘어나게 된다.

2016년 인공 지능과 세계 정상급의 프로 기사의 대결에서 인공 지능이 승리한 사건이 있었다. 그렇다면 이 인공 지능은 어떻게 인간을 이길 수 있었던 것일까?

인공 지능을 만드는 가장 쉬운 방법은 세상에 존재할 수 있는 모든 경우를 입력하거나 모든 문제를 해결하는 규칙을 입력하는 것이다. 하지만 모든 경우를 다 정리하는 것 자체도 어려운 일일 뿐만 아니라 새로운 변수가 생기거나 기존의 규칙들 사이에 충돌이 발생하면 컴퓨터 스스로 해결할 수 없다. 또 아무리 계산이 빠른 컴퓨터라도 제한 시간 이내에 가능한 모든 경우를 검색하여 결정하는 것은 불가능하다.

이런 상황에서 확률이 인공 지능의 해결책으로 등장하였다. 이를 바탕으로 나온 기법 중 하나인 몬테카를로 트리 탐색 기법은 전체의 경우 중 일부만을 샘플로 분석하여 상대적으로 확률이 높은 것을 선택하는 방법으로 계산에 필요한 시간을 획기적으로 단축하였다. 또 새로운 데이터의 관찰을 통해 기존에 예상한 확률을 수정하여 새로운 확률로 나아가는 학습의 과정으로 인공 지능의 성능을 급격히 발전시킬 수 있었다.

어떤 연구에 의하면 50년 이내에 인공 지능이 인간의 모든 능력을 뛰어 넘을 수 있을 것이라고 한다. 그런 세상이 온다면 인간은 어떤 삶을 살게 될까? 우려의 시선도 있지만 확실한 것은 미래는 우리가 만들어 가는 것이라는 점이다.

(출처: SPRi, 『AlphaGo의 인공 지능 알고리즘 분석』)

진로 탐색

인공 지능 전문가 | 인간에 대한 이해를 바탕으로 컴퓨터와 로봇 등이 인간과 같이 사고하고 의사 결정을 할 수 있는 기술을 개발한다.